

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. XII, N. 2

Serie decima

16 Aprile 1959

Multiple Photon Production in Compton Scattering and Bremsstrahlung.

R. C. MAJUMDAR, V. S. MATHUR and J. DHAR

Department of Physics, University of Dehli - Dehli

(ricevuto il 13 Giugno 1958)

Summary. — The multiple photon production in Compton scattering at high energies is investigated from the Feynman-Dyson formalism of quantum electrodynamics. It is observed that the multiple Compton scattering cross-section is largest when the photons emitted are all soft except one and differs from the single Compton scattering by a multiplicative factor, which increases with increasing energy of the incident photon. The multiple cross-section for bremsstrahlung at high energies is then obtained by the Williams-Weizsäcker method. The emission of about four hard photons within an extremely narrow cone is shown to be a plausible estimate.

1. - Introduction.

The possibility of multiple production of photons during Compton scattering, bremsstrahlung and electron-positron annihilation has always been overlooked, under the impression that the events are extremely rare owing to the feeble interaction in electromagnetic processes. In fact it is obvious in the light of the orthodox perturbation theory that probability for the production of n photons will always be smaller by a factor α^{n-1} , where $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$, than the probability for a similar process involving production of a single photon. However, GUPTA's recent calculations on multiple pro-

duction of photons in electron-positron annihilation ⁽¹⁾ and in bremsstrahlung ⁽²⁾ showed that at extremely high energies, of the order of 10^{14} eV, the effect of the small factor of fine structure constant α was mostly compensated by another large logarithmic factor which depended on the incident energy, and as a result, the cross-section indicated a reasonable probability of production of a finite number of photons. These results encouraged us to investigate the problem of multiple Compton Scattering, *i.e.* the scattering of a single incident photon into n photons. Calculations are carried out on the basis of Feynman-Dyson formalism of quantum electrodynamics ^(3,4). It is shown that the cross-section is maximum when for a given incident hard photon, all the emitted photons are soft, except one, which is hard. The total cross-section differs from the single Compton scattering cross-section only by a multiplicative factor which depends on the energy of the incident photon and vanishes when all the photons are emitted in exactly the forward direction.

The multiple Compton scattering cross-section is then used to obtain the cross-section for multiple bremsstrahlung by the Williams-Weizsäcker method. It is shown that emission of up to four photons within an extremely narrow cone cannot be ruled out, at energies of the order of 10^{14} eV. Although multiple bremsstrahlung cannot be considered an explanation of the Schein shower ⁽⁵⁾, it will, however, be interesting to look for an actual event in which a small number of photons, as for instance suggested by our calculations, are observed. Discovery of such an event would be a valuable test for the essential features of quantum electrodynamics.

2. - Multiple Compton scattering.

In the present work we shall throughout use the natural system of units $\hbar = c = 1$ and a metric tensor having non-vanishing components $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = 1$. We first consider the multiple scattering of a photon k into photon k' , k_1, k_2, \dots, k_n , by an electron initially at rest ($\mathbf{p} = 0, p_0 = m$) but finally having a 4-momentum $p' (= \mathbf{p}', p'_0)$. From the energy-momentum conservation relations it can be seen that, for a given incident hard photon, only the following set of photon emissions can take place: a) all emitted photons are soft, b) one photon (k') is hard and the rest of the photons are soft, and c) more than one emitted photon is hard. Following JOSEPH ⁽⁶⁾

(1) S. N. GUPTA: *Phys. Rev.*, **98**, 1502 (1955).

(2) S. N. GUPTA: *Phys. Rev.*, **99**, 1015 (1955).

(3) R. P. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949).

(4) F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949).

(5) M. SCHEIN, D. H. HASKIN and R. G. GLASSER: *Phys. Rev.*, **95**, 855 (1954).

(6) J. JOSEPH: *Phys. Rev.*, **103**, 481 (1956).

it can be easily shown that the main contribution to the cross-section for the production of n photons arises: A) when one of the emitted photons k' is hard, and the rest of the photons k_1, k_2, \dots, k_n are soft, and B) in the Feynman diagrams none of the soft photons is emitted by internal emission between the incident photon k and the photon k' . It is this case in which we shall be interested in the following investigation. The Feynman diagram for this case is given beside.

The matrix element for this graph is given by:

$$(1) \quad M_r = \frac{i^{n+1}(-ie)^{n+2}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}(n+4)-4}} \left(\frac{m^2}{p'_0 p_0} \right)^{\frac{1}{2}} \delta^4(p_i - p_f).$$

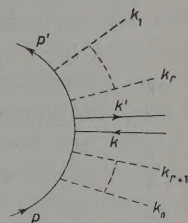


Fig. 1. - Feynman diagram for multiple photon emission by Compton scattering.

$$\begin{aligned} & \bar{u} \cdot (p') \frac{e_1}{(2\omega_1)^{\frac{1}{2}}} (p' + k_1 - m)^{-1} \frac{e_2}{(2\omega_2)^{\frac{1}{2}}} (p' + k_1 + k_2 - m)^{-1} \dots \\ & \dots \frac{e_r}{(2\omega_r)^{\frac{1}{2}}} (p' + k_1 + \dots + k_r - m)^{-1} \frac{e'}{(2\omega')^{\frac{1}{2}}} (p - k_n - k_{n-1} \dots - k_{r+1} + k - m)^{-1} \cdot \\ & \cdot \frac{e}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} (p - k_n - k_{n-1} \dots - k_{r+1} - m)^{-1} \frac{e_{+1}}{(2\omega_{r+1})^{\frac{1}{2}}} (p - k_n - \dots - k_{r+2} - m)^{-1} \dots \\ & \dots (p - k_n - m)^{-1} \frac{e_n}{(2\omega_n)^{\frac{1}{2}}} u(p). \end{aligned}$$

where we have put:

$$(2) \quad \begin{cases} p = p \cdot \gamma, & k = k \cdot \gamma, \\ p_i = p + k, & p_f = p' + k' + k_1 + \dots + k_n. \end{cases}$$

Interchanging k and k' we have a graph G' , the matrix element of which is M'_r . We thus readily find that for $|k_1|, \dots, |k_n| \ll |\bar{p}|$ and $|\bar{p}'|$:

$$(3) \quad M_r + M'_r = \frac{i^n(-ie)^n}{(2\pi)^{\frac{3}{2}n}} \frac{1}{(2\omega_1 \dots 2\omega_n)^{\frac{1}{2}}} (-1)^{n-r} \cdot \frac{(p' \cdot e_1) \dots (p' \cdot e_r)}{(p' \cdot k_1) \dots (p' \cdot k_1 + \dots + k_r)} \cdot \frac{(p \cdot e_{r+1}) \dots (p \cdot e_n)}{(p \cdot k_{r+1} + \dots + k_n) \dots (p \cdot k_n)} M_1 \delta^4(p_i - p_f),$$

where,

$$(4) \quad M_1 = \frac{i(-ie)^2}{(2\pi)^2} \left(\frac{m^2}{p'_0 p_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2\omega \cdot 2\omega')^{\frac{1}{2}}} \cdot \bar{u}(p') [e' (p + k - m)^{-1} e + e (p + k' - m)^{-1} e'] u(p).$$

(4) corresponds to matrix element for the emission of a single photon. We are now to sum up all possible matrix elements which arise out of the per-

mutations of the soft photons. To do this: A) we first consider the positions of photons k and k' fixed on the graph so that r of the soft photons are on one side and $n-r$ on the other (a typical example of this is the graph G). Then corresponding to this fixed «partition r » we sum over all possible permutations (p) amongst the soft photons which consist of i) p_p permutations of soft photons on the p -side; ii) $p_{p'}$ permutations of soft photons on the p' -side, and iii) interpermutations p_{int} between the soft photons of p and p' -sides. B) we next sum over all possible partitions r . This is denoted by $\sum_{(r)}$.

Thus we obtain the matrix element for the production of $(n+1)$ photons:

$$(5) \quad M_{n+1} = \frac{e^n}{(2\pi)^{\frac{3}{2}n}} \frac{1}{(2\omega_1 \dots 2\omega_n)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sum_{(r)} (-1)^{n-r} \sum_{(p)} \left[\frac{(p' \cdot e_1) \dots (p' \cdot e_r)}{(p' \cdot k_1) \dots (p' \cdot k_1 + \dots + k_r)} \cdot \frac{(p \cdot e_{r+1}) \dots (p \cdot e_n)}{(p \cdot k_{r+1} + \dots + k_n) \dots (p \cdot k_n)} \right] M_1 \delta^4(p_i - p_f),$$

where,

$$\sum_{(p)} \equiv \sum_{p_p} \sum_{p_{p'}} \sum_{p_{\text{int}}}.$$

We now use the identity due to GUPTA ⁽¹⁾

$$(6) \quad \sum_{p_p} \frac{1}{y_1(y_1 + y_2) \dots (y_1 + \dots + y_n)} = \frac{1}{y_1 y_2 \dots y_n},$$

where the summation is taken over all the permutations of the variables, and get:

$$(7) \quad M_{n+1} = \frac{e^n}{(2\pi)^{\frac{3}{2}n}} \frac{1}{(2\omega_1 \dots 2\omega_n)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sum_{(r)} (-1)^{n-r} \sum_{p_{\text{int}}} \left[\frac{(p' \cdot e_1) \dots (p' \cdot e_r)}{(p' \cdot k_1) \dots (p' \cdot k_r)} \cdot \frac{(p \cdot e_{r+1}) \dots (p \cdot e_n)}{(p \cdot k_{r+1}) \dots (p \cdot k_n)} \right] M_1 \delta^4(p_i - p_f).$$

We next apply the identity due to JOSEPH ⁽⁶⁾,

$$(8) \quad \sum_{(r)} (-1)^{n-r} \sum_{p_{\text{int}}} a'_1 \dots a'_r a_{r+1} \dots a_n = \prod_{s=1}^n (a'_s - a_s).$$

and obtain finally:

$$(9) \quad M_{n+1} = \prod_{s=1}^{s=n} \left[\frac{e}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2\omega_s)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{p' \cdot e_s}{p' \cdot k_s} - \frac{p \cdot e_s}{p \cdot k_s} \right\} \right] M_1 \delta^4(p_i - p_f),$$

$$(10) \quad = R_{n+1} \delta^4(p_i - p_f).$$

The total cross-section for emission of $(n+1)$ photons is now easily calculated from MÖLLER (7) invariant formula, given by:

$$(11) \quad \sigma_{n+1} = (2\pi)^2 \frac{p_0 \omega}{|p \cdot k|} \int d^3 p' \int d^3 k' \int d^3 k_1 \dots \int d^3 k_n \sum_{\text{pol., spin}} |R_{n+1}|^2 \delta^4(p_i - p_f).$$

We shall be interested in calculating the differential cross-section for the emission of a hard photon k' into the solid angle $d\Omega'$ in the direction θ', φ' and soft photons $k_s, s = 1, \dots, n$, the photon k_s being emitted into the solid angle $d\Omega_s$ in the direction θ_s, φ_s . The angles refer to polar co-ordinate system with axis in the direction of the incident photon. After integration over $d^3 p' d\omega'$, which simply removes δ -function, replacing \mathbf{p}' everywhere in the integrand by $\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}_1 \dots - \mathbf{k}_n \approx \mathbf{k} - \mathbf{k}'$, and produces a factor $d\omega'/(d(p'_0 + \omega'))$, we obtain:

$$(12) \quad d\sigma_{n+1} = \frac{(2\pi)^2}{n!} \prod_{s=1}^{s=n} I_s \omega_s^2 d\omega_s \sin \theta_s d\theta_s d\varphi_s \omega'^2 \frac{d\omega'}{d(p'_0 + \omega')} d\Omega' \sum |M_1|^2,$$

where,

$$(13) \quad \sum |M_1|^2 = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{m^2}{p'_0 p_0} \right) \frac{1}{(\omega \omega')}. \\ \cdot \sum_{\text{pol., spin}} |\bar{u}(\mathbf{p}') \{ e'(\mathbf{p} + \mathbf{k} - m)^{-1} \mathbf{e} + e(\mathbf{p} + \mathbf{k}' - m)^{-1} \mathbf{e}' \} u(\mathbf{p})|^2,$$

and

$$(14) \quad I_s = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2\omega_s)} \sum_{\text{pol.}} \left| \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{e}_s}{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{k}_s} - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_s}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_s} \right|^2.$$

The factor $n!$ in the denominator takes into account the fact that the soft photons are indistinguishable. Using the polarization summation formula:

$$(15) \quad \sum_{\text{pol.}} |\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}|^2 = \mathbf{p}^2 - \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{\omega} \right)^2,$$

we obtain for $\mathbf{p} = 0$,

$$(16) \quad I_s = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2\omega_s)} \left\{ \frac{\mathbf{p}'^2}{(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{k}_s)^2} - \frac{1}{\omega_s^2} \left(\frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{k}_s}{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{k}_s} \right)^2 \right\},$$

where \mathbf{p}' , as mentioned before, stands for $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$.

Now from the conservation of momentum

$$(17) \quad \mathbf{p}' \cdot \mathbf{k}_s = (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}_s = \\ = \omega \omega_s \cos \theta_s - \omega' \omega_s (\cos \theta_s \cos \theta' + \sin \theta_s \sin \theta' \cos (\varphi' - \varphi_s)).$$

(7) C. MÖLLER: *Kgl. Danske Videnskab Selskab*, 23, No. 1 (1945).

where φ' and φ_s are the azimuthal angles of the vectors \mathbf{k}' and \mathbf{k}_s . Thus for $\theta' \ll 1$ we obtain, using conservation of energy:

$$(18) \quad p' \cdot k_s = p'_0 \omega_s (1 - \beta \cos \theta_s),$$

where,

$$(19) \quad \beta = \frac{p'_0 - m}{p'_0} = \frac{|\mathbf{p}'|}{p'_0}.$$

The expression I_s reduces to:

$$(20) \quad I_s = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2\omega_s)} \frac{\beta^2 \sin^2 \theta_s}{\omega_s^2 (1 - \beta \cos \theta_s)^2}.$$

By integrating over the soft photon variables in (12), we finally obtain the differential cross-section for multiple Compton scattering:

$$(21) \quad \sigma_{n+1}(\omega, \omega') d\omega' = \frac{1}{n!} \prod_{s=1}^n \left[\frac{\alpha}{2\pi} \beta^2 \int \frac{d\omega_s}{\omega_s} \int \frac{\sin^2 \theta_s d\theta_s}{(1 - \beta \cos \theta_s)^2} \right] \sigma_1(\omega, \omega') d\omega'$$

$$(22) \quad = \frac{1}{n!} \left[\frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - 2 \right) \ln \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right) \right]^n \sigma_1(\omega, \omega') d\omega',$$

where $\sigma_1 d\omega'$ is the differential cross-section for single Compton scattering and is given by:

$$(23) \quad \sigma_1 d\omega' = \pi r_0^2 m \frac{d\omega'}{\omega^2} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + \left(\frac{m}{\omega'} - \frac{m}{\omega} \right)^2 + 2m \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right) \right],$$

and, ε and λ are the upper and lower limits for the energy of soft photons.

We see from (21) that the maximum contribution to the cross-section results from photons emitted at an angle $\theta_s = \cos^{-1} \beta$. Since the factor $(1/\beta) \ln((1+\beta)/(1-\beta)) - 2$ in (22) increases as β increases, the cross-section is largest as $\beta \rightarrow 1$. This corresponds to $p'_0 \gg m$ or $\omega \gg \omega'$. (22) can then be written in the form:

$$(24) \quad \sigma_{n+1} d\omega' = \frac{1}{n!} \left[\frac{\alpha}{\pi} \ln \left(\frac{2p'_0}{m} \right) \ln \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right) \right]^n \sigma_1 d\omega'.$$

It is to be emphasized that the multiple Compton scattering is most probable, and given by (24), only when all the emitted photons except ω' are soft, i.e., $\omega' \gg m$, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \ll m$, and that $\omega \gg m$, $p'_0 \gg m$. The multiple Compton scattering cross-section differs from the single Compton scattering cross-section by a multiplicative factor, and becomes increasingly more important with

the increase of incident photon energy. It should be noted that the multiple Compton scattering vanishes when the photons are emitted in exactly the forward direction. A similar result for double scattering has already been discussed by MANDL and SKYRME.⁽⁸⁾

3. - Multiple bremsstrahlung.

We now apply Williams-Weizsäcker method^(9,10) of virtual quanta to obtain the multiple photon emission in bremsstrahlung by an electron, moving with a high energy E and velocity v in the field of a nucleus of charge Ze . Let us now consider the process in a Lorentz frame of reference in which the electron is at rest and the nucleus is moving with a velocity v towards it. Now for $v \approx c$ the field of the nucleus is largely transverse, and by Fourier analysis it may very well be represented by light quanta travelling parallel to the direction of the motion of the nucleus. These virtual quanta suffer Compton scattering by the electron at rest and the scattered quanta, on transforming back to the original system in which the nucleus is at rest and electron is moving past by it, appear as the emitted radiation in multiple bremsstrahlung.

The Williams-Weizsäcker spectrum for virtual quanta lying between ω and $\omega + d\omega$ is given by:

$$(25) \quad q(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \ln \left(\frac{E}{d\omega} \right) \frac{d\omega}{\omega},$$

where α is a constant of the order of unity. The differential cross-section for multiple bremsstrahlung is then given by:

$$(26) \quad \sigma_{n+1}^B(\omega') d\omega' = d\omega' \int q(\omega) d\omega \sigma_{n+1}^C(\omega, \omega').$$

where $\sigma_{n+1}^C(\omega, \omega') d\omega'$ is the cross-section for multiple Compton scattering given by (21). Transforming back to the laboratory system and integrating we obtain the total cross-section as:

$$(27) \quad \sigma_{n+1}^B = \frac{1}{n!} \left[\frac{\alpha}{\pi} \ln \left(\frac{2E}{bm} \right) \ln \left(\frac{\varepsilon}{\bar{\lambda}} \right) \right]^n \sigma_1^B,$$

⁽⁸⁾ F. MANDL and T. H. SKYRME: *Proc. Roy. Soc., A* **215**, 497 (1952).

⁽⁹⁾ E. J. WILLIAMS: *Kgl. Danske Videnskab Selskab*, **13**, No. 4 (1935).

⁽¹⁰⁾ C. F. V. WEIZSÄCKER: *Zeits. f. Phys.*, **88**, 612 (1934).

where b is a constant of the order of unity, and σ_1^B is the corresponding Bethe-Heitler bremsstrahlung formula given by:

$$(28) \quad \sigma_1^B = 4r_0^2 \alpha Z^2 \left[\ln \left(\frac{E}{dm} \right) - \frac{1}{2} \right].$$

We now note the following relations between δ and ω and their Lorentz transforms δ_L , θ_L in the laboratory system; δ is the direction of the recoil electron with respect to the incident photon.

For $p'_0 \gg m$:

$$(29) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \delta_L = \frac{\gamma}{\operatorname{tg}(\delta/2)}, & \operatorname{tg} \theta_L = \frac{\gamma}{\operatorname{tg}(\theta/2)} \\ \text{and} \\ \omega_L = \frac{\omega}{\gamma} (1 - \cos \theta), & \gamma = \frac{m}{E}. \end{cases}$$

Since in Compton scattering the electron cannot be scattered backwards, it is clear that the deflected electron goes off at an angle $\delta_L > m/E$ with the incident electron direction. The energetic photons are emitted in a narrow cone around the direction of the incident electron, while the softer photons are emitted at larger angles. It is therefore only those photons which are emitted in a narrow cone which will be susceptible to observations. We will therefore be interested in finding out the cross-section for multiple bremsstrahlung of hard photons lying within a narrow cone between angles 0 and θ_L around the direction of the incident electron. We therefore carry out the integration in (21) over angles θ_s lying between $2m/\theta_L E$ and π instead of between 0 and π , as was done earlier, and obtain:

$$(30) \quad \sigma_{n+1}^B = \frac{1}{n!} \left[\frac{\alpha}{\pi} \left\{ \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1+\eta}{((1-\beta)/(1+\beta)) + \eta} \right) - \frac{1}{1+\eta} - \frac{1}{1+((1+\beta)/(1-\beta))\eta} \right\} \ln \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right) \right]^n \sigma_1^B,$$

where,

$$(31) \quad \eta = \left(\frac{m}{E\theta_L} \right)^2.$$

This reduces to

$$(32) \quad \sigma_{n+1}^B = \frac{1}{n!} \left[\frac{2\alpha}{\pi} \ln \left(\frac{E\delta_L}{m} \right) \ln \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right) \right]^n \sigma_1^B, \quad \text{for } \theta_L \gg \delta_L;$$

and,

$$(33) \quad \sigma_{n+1}^B = \frac{1}{n!} \left[\frac{2\alpha}{\pi} \ln \left(\frac{E\theta_L}{m} \right) \ln \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right) \right]^n \sigma_1^B, \quad \text{for } \theta_L \ll \delta_L.$$

It is to be observed that the cross-section for multiple Bremsstrahlung is maximum at

$$(34) \quad \cos \theta_s = \beta = \frac{p'_0 - m}{p'_0},$$

giving,

$$(35) \quad \theta_s \approx \left(\frac{2m}{p'_0} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

When transformed to the laboratory system by the relation (29) the maximum occurs at $\theta_L \approx \delta_L$. In order that the maximum may be within the range of angular integration from 0 to θ_L we must have $\theta_L > \delta_L$ and the cross-section which is of interest for multiple Bremsstrahlung is given by (32).

Now we calculate the order of magnitude of multiple bremsstrahlung as compared with the single Bremsstrahlung. Taking $E \sim 10^{14}$ eV, $\delta_L \sim 10^{-4}$ radians $\varepsilon/\lambda \sim 10^3$, we find $(2\alpha/\pi) \ln(E\delta_L/m) \ln(\varepsilon/\lambda) \approx 1$, and the cross-section becomes

$$(36) \quad \sigma_{n+1}^B \approx \frac{1}{n!} \sigma_1^B.$$

We therefore see that the emission of about four hard photons within a narrow cone cannot be ruled out. Experimental realization of such events will give a valuable check on the validity of quantum electrodynamics.

* * *

Two of us (V.S.M. and J.D.) are thankful to the University Grants Commission for the award of fellowships which made this investigation possible.

RIASSUNTO (*)

Partendo dal formalismo di Feynman-Dyson dell'elettrodinamica quantistica si studia la produzione multipla dei fotoni nello scattering Compton alle alte energie. Si osserva che la sezione d'urto per lo scattering Compton multiplo è massima quando i fotoni emessi sono tutti molli eccetto uno e differisce da quella dello scattering Compton semplice per un fattore moltiplicativo che cresce coll'aumentare dell'energia del fotone incidente. La sezione d'urto multipla per la bremsstrahlung alle alte energie si ottiene poi col metodo di Williams-Weizsäcker. Si mostra che l'emissione di circa quattro fotoni duri entro un cono estremamente ristretto risponde a una previsione plausibile.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

On the Determination of the Parity of Hyperons and K-Mesons.

S. M. BILENKY and R. M. RYNDIN

Joint Institute for Nuclear Research, Laboratory of Theoretical Physics - Dubna

(ricevuto il 29 Novembre 1958)

Summary. — Possible methods for determining the relative parity of hyperons and K-mesons in the reactions with polarized proton beams were considered.

The determination of the intrinsic parity of K-mesons and hyperons is one of the most important problems of the physics of elementary particles. Since the parity is not conserved in all weak interactions including the decays of strange particles the intrinsic parity of hyperons and K-mesons may be determined only in the study of strong interactions responsible for their production and mutual transformations.

Recently some ways for the determination of the parity of strange particles based upon the study of the reactions involving hyper-nuclei and of those involving strange particles near the threshold ⁽¹⁻⁶⁾ have been suggested.

Other possibilities are pointed out in this note.

⁽¹⁾ R. H. DALITZ: *Rep. on Progr. in Phys.*, vol. **20** (London, 1957).

⁽²⁾ CHOU KUANG-CHAO and M. I. ŠIROKOV: *Nucl. Phys.*, **6**, 10 (1958).

⁽³⁾ CHOU KUANG-CHAO: *Journ. Exp. Theor. Phys.*, **34**, 1027 (1958).

⁽⁴⁾ L. B. OKUN and I. J. POMERANČUK: *Journ. Exp. Theor. Phys.*, **34**, 997 (1958).

⁽⁵⁾ G. COSTA and B. T. FELD: *Phys. Rev.*, **109**, 606 (1958).

⁽⁶⁾ L. B. OKUN, I. J. POMERANČUK and I. M. ŠMUSKEVIČ: *Journ. Exp. Theor. Phys.*, **34**, 1246 (1958).

1. - Consider the reaction (*)

$$(1) \quad p + {}^4\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + Y + K$$

with a polarized proton beam. The matrix of reaction (1) is of the form

$$(2) \quad M = a + \sigma \cdot b,$$

where the quantities a and b are functions of the momenta of the initial and final states. The spins of hyperon and K-meson are assumed to be $\frac{1}{2}$ and 0 respectively. Using usual methods (7) we obtain the following expression for the differential cross-section of reaction (1) involving the polarized proton beam

$$(3) \quad \sigma = \sigma_0 \left(1 + P_0 \cdot \frac{2\text{Re } a^* b + i b^* \times b}{aa^* + b \cdot b^*} \right).$$

Here σ_0 is the cross-section of process (1) for unpolarized incident beam, whereas P_0 is the initial proton polarization. On the other hand, hyperon polarization in reaction (1) with the unpolarized protons is

$$(4) \quad P = \frac{2\text{Re } a^* b + i b \times b^*}{aa^* + b \cdot b^*}.$$

The product of the intrinsic parities of proton, hyperon and K-meson may take two values $I_p I_Y I_K = \pm 1$. In the first case the matrix M is a scalar, i.e., the quantity b is an axial vector and may be presented in the form

$$(5) \quad b = b_1 K \times K' + (K \cdot K' \times K'')(b_2 K + b_3 K'),$$

where K , K' and K'' are the momenta of a proton, hyperon and K-meson (**) respectively. The quantities a and b_i are arbitrary functions of scalar products constructed from the vectors K , K' and K'' .

In the second case M is a pseudoscalar, i.e. the quantity b is a vector

$$(6) \quad b = (K \cdot K' \times K'') b'_1 K \times K' + b'_2 K + b'_3 K'.$$

(*) Note that in (1) helium may be replaced by any nucleus with zero spin, e.g. ${}^{12}\text{C}$.

(7) L. WOLFENSTEIN and J. ASHKIN: *Phys. Rev.*, **85**, 947 (1952).

(**) Here and further on the momenta K and K' are not parallel to each other.

The quantity a is a pseudoscalar

$$(7) \quad a = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}' \times \mathbf{K}'') a'.$$

a' and b'_i are arbitrary scalar functions.

If the momenta of proton, K-meson and hyperon lie in the same plane then the triple scalar product $(\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}' \times \mathbf{K}'')$ vanishes and if $I_p I_Y I_K = 1$

$$(5') \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{K} \times \mathbf{K}',$$

while if $I_p I_Y I_K = -1$

$$(6') \quad \mathbf{b} = b'_2 \mathbf{K} + b'_3 \mathbf{K}'$$

and

$$(7') \quad a = 0.$$

Then, as can be easily seen from (3) and (4), the expression for the differential cross-section takes the form

$$(8) \quad \sigma = \sigma_0 (1 \pm \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}),$$

where the sign is $(+)$ if the complete intrinsic parity does not change, and $(-)$ otherwise.

Polarized proton beams are obtained in the scattering of unpolarized beams by nuclei and their polarization is orthogonal to the momentum of the scattered protons. Choosing the z -axis in a direction of vector \mathbf{K} , and the y -axis in that of \mathbf{P}_0 , we write (8) as follows

$$(9) \quad \sigma = \sigma_0 (1 \pm P_0 P \cos \varphi').$$

Hence, the azimuthal asymmetry of the hyperon distribution is

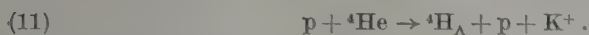
$$(10) \quad \varepsilon = \pm P_0 P.$$

Thus, the measurement of the azimuthal asymmetry in reaction (1) with polarized protons makes it possible to define the sign of $I_p I_Y I_K$ uniquely, if the sign of the polarization P arising as a result of the reaction with the unpolarized protons (*) is known. The sign of P may be determined by

(*) The magnitude and sign of the polarization P_0 are supposed to be known from previous experiments on double proton scattering.

studying the pion asymmetry from the decay of polarized hyperons. As it follows from the previous arguments in the determination of the azimuthal asymmetry it is necessary to choose such events in which all the particles lie in the same plane. One may perform the integration over the angle between the directions of the momenta of a proton and K-meson.

Another reaction of the considered type is



if the spin of a hypernucleus ${}^4\text{H}_\Lambda$ is zero. However, reaction (1) considered above does not require such an assumption. Moreover, its study would enable to determine the relative parity of different hyperons.

2. — Consider the reaction (3)



Suppose the spin of the hypernucleus ${}^5\text{He}_\Lambda$ to be $\frac{1}{2}$. Since in this case only two vectors (the relative momenta of the initial and final states) are available then, as is seen from (2)–(4), the cross-section of the reaction (12) with the polarized proton beam is of the form (8). Therefore the measurement of the azimuthal asymmetry of K-mesons makes it possible to determine the relative parity (ΔK) if the sign of polarization of the hyper-nucleus ${}^5\text{He}_\Lambda$ in reaction (12) with the unpolarized protons is known. These conclusions refer also to the reactions with a polarized antiproton beam. For example, to the reaction



if the spin of ${}^3\text{H}_\Lambda$ is $\frac{1}{2}$.

In conclusion let us point out that reactions (1) and (11) when all the particles lie in the same plane as well as reactions (12) and (13) are processes of the type



For such processes the differential cross-section always has the form (8), that makes it possible to use them for the unique determination of the internal

parity. Here there are two possibilities:

- 1) Polarized target with spin $\frac{1}{2}$ and a beam of spinless particles ^(8,9).
- 2) Polarized beam of particles with spin $\frac{1}{2}$ and a spinless target.

The latter possibility has been considered in this note.

* * *

The authors are grateful to CHOU KUANG-CHAO, B. PONTECORVO and YU. ŠČERBAKOF for interesting discussions of the results obtained.

⁽⁸⁾ S. M. BILENKY and R. M. RYNDIN: *Journ. Exp. Theor. Phys.*, **35**, 827 (1958). S. M. BILENKY: *Journ. Exp. Theor. Phys.*, **36**, 291 (1959).

⁽⁹⁾ S. M. BILENKY: *Nuovo Cimento*, **10**, 1049 (1958).

RIASSUNTO (*)

Si esaminano i possibili metodi per la determinazione della parità relativa degli iperoni e mesoni K nella reazione con fasci di protoni polarizzati.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Le caratteristiche della macchina definitiva del C.S.C.E. di Pisa dal punto di vista logico-matematico (*).

A. CARACCILO (**) e L. GUERRI (**)

Centro Studi Calcolatrici Elettroniche dell'Università - Pisa

(ricevuto il 12 Dicembre 1958)

Riassunto. — Si descrivono le caratteristiche generali della calcolatrice in costruzione presso il C.S.C.E. con particolare riferimento alla modifica automatica degli indirizzi mediante celle parametriche.

1. — Introduzione.

La calcolatrice elettronica in costruzione presso il C.S.C.E. (Centro Studi calcolatrici elettroniche) di Pisa, ha le seguenti caratteristiche: è in « parallelo » con parole di lunghezza fissa di 36 bits. Una parola rappresenta un numero o una istruzione. I numeri sono rappresentati, in base 2, in virgola fissa o in virgola mobile. Per la virgola mobile 28 bits sono per la parte frazionaria, 8 per l'esponente. La memoria principale a nuclei magnetici, sarà di 4 096 parole, ma è prevista la possibilità di ampliare la memoria fino a 32 768 parole senza apportare modifiche alla calcolatrice. La memoria ausiliaria sarà costituita da un Tamburo Magnetico di 16 384 parole e da alcune unità a nastro magnetico. Il numero dei nastri magnetici collegati con la calcolatrice quando questa entrerà in funzione non è stato ancora fissato ma, come nel caso della memoria principale è prevista la possibilità di aggiungere successivamente varie unità a nastro magnetico.

(*) Presentato al XLIV Congresso della Società Italiana di Fisica, Palermo, 6-11 Novembre 1958.

(**) Distaccato dalla Sezione di Pisa dell'I.N.F.N. presso il C.S.C.E.

2. - Istruzioni.

La calcolatrice del Centro ha una lista di oltre 100 istruzioni. Ogni istruzione è rappresentata con una parola. Le istruzioni sono del tipo ad un indirizzo, con modifica e si distinguono in ordinarie e speciali. Questa distinzione è fatta in base al diverso uso delle celle parametriche (si veda più avanti per la definizione di cella parametrica). Le istruzioni ordinarie sono modificabili fino a due volte, quelle speciali una volta. Una caratteristica della calcolatrice del Centro è la soluzione adottata per la modifica delle istruzioni che è fatta utilizzando celle ordinarie della memoria invece di registri speciali.

3. - Celle parametriche.

Oltre ai registri aritmetici di cui si fa cenno in altra parte della nota, la calcolatrice ha due registri, indicati con H^0 e H^1 , di 15 bits ciascuno. Per mezzo di una istruzione si può registrare in H^0 (in H^1) un numero intero h^0 (h^1). Le celle di indirizzo:

$$h^0 + 1, h^0 + 2, \dots, h^0 + 31 \quad \text{e} \quad h^1 + 1, h^1 + 2, \dots, h^1 + 31,$$

formano due gruppi di celle che si indicano con $\{H^0\}$ e $\{H^1\}$. Le celle di questi gruppi si chiamano *celle parametriche*. L'indice di gruppo che vale 0 o 1 specifica uno dei due gruppi. I numeri 1, 2 ... 31, si dicono *indirizzi relativi* delle celle parametriche.

h^0 (h^1) si dice *origine* di $\{H^0\}$ ($\{H^1\}$).

Fissati h^0 e h^1 una cella parametrica è completamente individuata per mezzo dell'indice di gruppo e dell'indirizzo relativo. Cambiare il contenuto del registro H^0 significa considerare da quel momento in poi e fino a nuovo cambiamento, come gruppo $\{H^0\}$ le 31 celle consecutive a quella che ha come indirizzo il nuovo contenuto di H^0 . Analogamente per H^1 .

Le celle parametriche svolgono lo stesso ruolo di registri di modifica nel modo che viene descritto più avanti. Le celle parametriche di indirizzo relativo 0, cioè indirizzo assoluto h^0 e h^1 non fanno parte del gruppo. Dal punto di vista del programmatore è come se tali celle contenessero 0 e il loro contenuto non potesse venir cambiato.

È importante osservare, che le celle parametriche, comprese quelle di indirizzo relativo 0, sono nello stesso tempo disponibili come ordinarie celle di memoria senza restrizioni speciali.

In una istruzione le celle parametriche sono usate nel modo seguente: siano $s_0, s_1 \dots s_{35}$ i 36 bits dell'istruzione. Essi sono suddivisi:

$$(s_0, s_1), \quad (s_2 \dots s_8), \quad (s_9 \dots s_{14})(s_{15} \dots s_{20})(s_{21} \dots s_{35}).$$

s_0, s_1 sono usati per arresti controllati dal quadro di comando.

$s_2 \dots s_8$ danno il simbolo di operazione.

s_9 e $s_{10} \dots s_{14}$ danno rispettivamente l'indice di gruppo e un indirizzo relativo che definiscono una cella parametrica P' .

s_{15} e $s_{16} \dots s_{20}$ danno rispettivamente un indice di gruppo e un indirizzo relativo che definiscono una cella parametrica P'' .

$s_{21} \dots s_{35}$ definiscono un numero intero compreso fra 0 e 32767.

Con P' e P'' si indicano quindi le celle parametriche definite da $(s_9 \dots s_{14})$ e $(s_{15} \dots s_{20})$.

Indichiamo con s il numero intero definito da $(s_{21} \dots s_{35})$ e con p' (p'') il contenuto di P' (P'') con l'intesa che $p' = 0$ ($p'' = 0$) se l'indirizzo relativo P' (P'') è 0.

Nelle istruzioni ordinarie, l'istruzione è eseguita con l'indirizzo $s + p' + p''$.

Così se l'istruzione ordinaria è modificata una volta sola è indifferente considerare la cella impiegata nella modifica come P' o P'' .

Allo stesso modo se le modifiche sono due è indifferente l'ordine in cui si considerano le celle parametriche usate.

Invece, per quanto riguarda le istruzioni speciali P' e P'' hanno ruolo diverso.

P' è usato nello stesso modo descritto per le istruzioni ordinarie.

P'' invece può essere usato in diversi modi a seconda dell'istruzione speciale che si considera.

Indichiamo con $\Delta(s + p')$ e $\gamma\Delta(s + p')$ rispettivamente la cella di indirizzo $s + p'$ e il contenuto di tale cella. Vi sono per esempio le seguenti istruzioni speciali:

$$\begin{aligned}(s + p') &\rightarrow P'', \\ -(s + p') &\rightarrow P'', \\ \gamma\Delta(s + p') &\rightarrow P'', \\ (p'') &\rightarrow \Delta(s + p').\end{aligned}$$

I salti condizionati o incondizionati rientrano tra le istruzioni speciali. L'indirizzo dell'istruzione a cui si salta è dato da $s + p'$ e in P'' viene inviato l'indirizzo presente nel contatore di istruzione al momento dell'esecuzione del salto. Questo fatto facilita il rientro dai sottoprogrammi nel programma principale.

In definitiva nella calcolatrice del Centro sono disponibili due gruppi di 31 celle l'uno che funzionano come registri di modifica. Questi gruppi si possono sostituire con altri con un'apposita istruzione che definisce l'origine dei nuovi gruppi.

Un inconveniente di questo metodo è che ogni modifica richiede una lettura della memoria e quindi circa 10 μs supplementari. Non si ha perdita di tempo se l'indirizzo relativo è zero.

4. - Registri aritmetici.

I registri aritmetici a cui fanno riferimento le istruzioni sono 2 indicati con A e B . Ognuno di questi registri è di 36 bits. B ha un ruolo ausiliario nei confronti di A ed è utilizzato in particolare per la moltiplicazione, la divisione e i calcoli di precisione multipla.

Un'altra caratteristica della Calcolatrice è la possibilità di eseguire alcune operazioni tra unità aritmetica e memoria con registrazione del risultato in A oppure in memoria. Così, indicando con a il contenuto di A , e con z il contenuto di una cella di memoria Z , sono possibili le seguenti operazioni:

$z \rightarrow A$ con Z immutato	$a \rightarrow Z$ con A immutato,
$-z \rightarrow A$ con Z immutato	$-a \rightarrow Z$ con A immutato,
$z + a \rightarrow A$ con Z immutato	$a + z \rightarrow Z$ con A immutato,
$z - a \rightarrow A$ con Z immutato	$z - a \rightarrow Z$ con A immutato,
$a - z \rightarrow A$ con Z immutato	$a - z \rightarrow Z$ con A immutato,

nelle operazioni aritmetiche il traboccamento è sempre segnalato su apposito indicatore.

Per quanto riguarda i salti oltre il salto incondizionato, vi sono i seguenti:

- salta se $a \geq 0$,
- salta se $a < 0$,
- salta se $a = 0$,
- salta se $a \neq 0$,

a salti analoghi su B . Inoltre vi sono salti su traboccamento. Vi sono pure istruzioni di confronto e istruzioni di salto su confronto. Tra queste istruzioni di confronto vi sono per esempio:

- confronta a e z ,
- confronta z e 0 ,
- confronta i -mo bit di z con 0 .

Nel confronto a e z rimangono immutati.

I salti su confronto sono:

- salta se nell'ultimo confronto i due numeri erano $=$;
- salta se nell'ultimo confronto i due numeri erano \neq ;
- salta se nell'ultimo confronto il primo era \geq del secondo;
- salta se nell'ultimo confronto il primo numero era $<$ del secondo;

La moltiplicazione in virgola fissa ha tre varianti:

- moltiplicazione cumulativa con risultato di 72 bits in A e B ;
- moltiplicazione esatta con risultato di 72 bits in A e B ;
- moltiplicazione arrotondabile con risultato di 36 bits in A .

La divisione in virgola fissa ha tre varianti:

- divisione lunga esatta: il dividendo di 72 bits ha i primi 36 bits in A e i rimanenti in B . Il quoziente si forma in A il resto in B ,
- divisione lunga arrotondabile: il dividendo è in A e B , il quoziente si forma in A ;
- divisione corta arrotondabile: il dividendo di 36 bits è in A il quoziente si forma in A .

Diciamo operazioni con risultato arrotondabile invece che arrotondato perchè con un'apposita istruzione si può controllare l'arrotondamento in tutte le successive operazioni con risultato arrotondabile.

In tal modo uno stesso calcolo può essere ripetuto con o senza arrotondamento.

Questo fatto può fornire qualche indicazione sulla precisione dei risultati. Nelle operazioni in virgola mobile l'arrotondamento e la normalizzazione dei risultati sono controllabili separatamente nello stesso modo descritto per la virgola fissa.

Riportiamo ora i tempi di esecuzione delle principali istruzioni. Questi tempi vanno aumentati di $10 \mu s$ per la chiamata dell'istruzione stessa; ogni modifica dell'istruzione richiede altri $10 \mu s$.

- Trasferimenti tra registri e memoria: $10 \mu s$.
- Somme e sottrazioni in virgola fissa: $10 \mu s$.
- Moltiplicazioni in virgola fissa: $240 \mu s$.
- Divisioni in virgola fissa: $280 \mu s$.
- Somme e sottrazioni in virgola mobile: $(80 + 4n) \mu s$, con $n=a$ numero di traslazioni necessarie per allineare la virgola e per normalizzare il risultato.
- Moltiplicazione in virgola mobile: $210 \mu s$.
- Divisione in virgola mobile: $260 \mu s$.

Questi tempi rappresentano solo una indicazione di massima.

Sulla base dell'esperienza fatta sulla calcolatrice ridotta già costruita al Centro (parole di 18 bits, memoria di 1024 parole, 30 istruzioni senza modifica) non è esclusa la possibilità di ridurre i tempi dati sopra del 20% circa.

SUMMARY

A description is given of the computer being built at the C.S.C.E. with particular reference to the solution adopted for the modification of the instructions by means of « parametric cells ».

Memorie ed entrata-uscita della « macchina definitiva » del C.S.C.E. (*).

A. CARACCILO (**), G. CECCHINI (**), G. B. GERACE (**),
M. FALLENI (**) e A. SABBADINI (**)

Centro Studi Calcolatrici Elettroniche dell'Università - Pisa

(ricevuto il 28 Dicembre 1958)

Riassunto. — Si descrive la connessione delle memorie e dell'entrata-uscita con il nucleo centrale della macchina in costruzione presso il Centro di Pisa. Si illustra il complesso di tali apparecchiature di cui verrà dotata inizialmente la macchina e le notevoli possibilità di ampliamenti già previsti dal progetto logico generale. Si accenna alla possibilità di collegamenti diretti con istituti di ricerca interessanti all'uso della macchina.

1. — Introduzione.

Il giusto proporzionamento delle capacità e velocità delle memorie di un calcolatore elettronico e delle velocità degli organi di entrata e uscita dipende da una larga serie di fattori.

Tra i principali indichiamo:

- La velocità base di calcolo del nucleo centrale.
- Il tipo del calcolatore (per usi scientifici o commerciali).
- Le caratteristiche dei calcoli da eseguire.
- La quantità dei dati da introdurre in entrata e stampare in uscita.

(*) Presentato al XLIV Congresso della Società Italiana di Fisica, Palermo, 6-11 Novembre 1958.

(**) Distaccato dalla Sezione di Pisa dell'I.N.F.N. presso il C.S.C.E.

(*) Distaccato dalla S.p.A. Olivetti presso il C.S.C.E.

- La struttura logica della macchina e l'organizzazione della programmazione.
- I costi.

Nella presente comunicazione, anche se talvolta sarà fatto riferimento al problema delle scelte, verrà essenzialmente illustrato il complesso di apparecchiature di cui sarà dotata inizialmente la «macchina definitiva» in costruzione presso il Centro di Pisa e le notevoli possibilità di ampliamento già previste dal progetto logico generale.

Si descriverà la connessione delle memorie e dell'entrata-uscita con il nucleo centrale e verrà fatto cenno alla possibilità di collegamenti diretti con istituti di ricerca interessati all'uso della macchina.

2. - Previsioni di progetto.

Il progetto della «macchina definitiva» prevede:

1) Una «memoria veloce» a nuclei magnetici che riceve e trasmette le informazioni (istruzioni e dati) da e verso il nucleo centrale e le «apparecchiature ausiliarie» del calcolatore.

2) Una serie di «apparecchiature ausiliarie» che si compone di: a) memorie ausiliarie; b) organi di Entrata e Uscita.

a) Le «memorie ausiliarie» comprendono un tamburo magnetico ed una serie di nastri magnetici (da 1 a 20) che ricevono e trasmettono le informazioni da e verso la «memoria veloce».

b) Gli organi di entrata e uscita comprendono:

- Uno o più lettori fotoelettrici a 400 caratteri/s in entrata per la lettura su banda perforata.
- Una telescrivente in entrata per l'introduzione diretta di dati α -numerici.
- Uno stampatore parallelo di uscita a 250 caratteri/s per la composizione e stampa dei risultati.
- Una telescrivente ricevente di uscita con funzioni diverse tra cui il controllo di calcoli e programmi con dati significativi.
- Un perforatore di banda veloce di uscita a 60 caratteri/s per la reintroduzione sui lettori fotoelettrici dei dati e programmi perforati.
- Un quadro di comando manuale per le operazioni di avviamento della macchina ed i necessari controlli.

I nastri magnetici, oltre che come «memorie ausiliarie», possono essere usati come organi veloci di entrata e di uscita, ammesso di disporre fuori della macchina delle opportune apparecchiature commerciali di conversione con i normali mezzi perforanti e stampanti.

3. — La memoria veloce.

La « memoria veloce » avrà inizialmente 4096 celle, ma il progetto della macchina ne prevede l'ampliamento fino a 32768, con la semplice aggiunta o sostituzione dei gruppi di memoria.

Ricorrendo alle tecniche di indirizzamento indiretto connesse all'uso delle celle parametriche, è possibile elevare la capacità della memoria a valori praticamente illimitati.

La tendenza ad aumentare la capacità delle « memorie veloci » è principalmente dovuta alla crescente necessità di risolvere problemi con grande numero di dati accessibili a caso (tipico ad esempio l'impiego del metodo di Monte Carlo nella risoluzione dei problemi nucleari), alla agevolazione che introduce nei moderni metodi di programmazione automatica ed al costo dei nuclei ferritici che nel giro di pochi anni si è ridotto di molti fattori.

Attualmente, a parità del numero di celle, una memoria veloce a nuclei ferritici viene a costare solo circa il doppio di una memoria lenta a tamburo.

4. — Il controllo esterno.

Le « memorie ausiliarie » (tamburo e nastri magnetici) e gli organi di Entrata sono forniti di un controllo esterno molto centralizzato e separati dal nucleo centrale e dalla memoria veloce da un unico Registro Esterno.

Per l'uscita è utilizzato un registro aritmetico della macchina. La trasmissione di una parola (36 bit) tra le Apparecchiature Ausiliarie ed il Registro Esterno avviene con 6 trasferimenti successivi di un carattere di 6 bit utili.

Questa soluzione, oltre a permettere di utilizzare istruzioni pressochè identiche nell'impiego di alcune Apparecchiature Ausiliarie (ad es, nelle istruzioni di trasferimento a blocchi del tamburo magnetico, nastri magnetici e lettori fotoelettrici) conduce a poter utilizzare per l'entrata un carattere di 6 bit che facilita notevolmente l'introduzione di dati α -numerici per la programmazione automatica.

In realtà, all'interno delle « apparecchiature ausiliarie », ai 6 bit utili viene aggiunto un bit per il controllo di parità che nei trasferimenti dal nucleo centrale e memoria veloce verso le Apparecchiature Ausiliarie viene aggiunto automaticamente e nei trasferimenti inversi controlla il complesso delle operazioni scrittura-lettura.

L'introduzione di un bit di controllo solo nelle « Apparecchiature Ausiliarie » è giustificata dalla loro minore sicurezza per la presenza di organi meccanici in movimento.

5. - Caratteristiche e istruzioni delle apparecchiature ausiliarie.

Daremo ora una breve descrizione delle caratteristiche delle Apparecchiature Ausiliarie adottate e delle istruzioni che le riguardano.

Tutte le istruzioni che seguono sfruttano a fondo le possibilità offerte dalle celle parametriche e la flessibilità logica del calcolatore.

Il Tamburo magnetico ha le seguenti caratteristiche: 16384 celle di memoria; 40 μ s di tempo di trasferimento; 10 ms di tempo medio di accesso per un programma non ottimizzato temporalmente.

Dispone di 5 istruzioni:

- Una, per l'indirizzo della prima parola sul tamburo da cui iniziare il trasferimento.
- Due per il trasferimento nel senso Tamburo magnetico \rightarrow memoria veloce e viceversa di un determinato numero di parole a partire da una determinata cella di memoria.
- Due per il trasferimento Tamburo Magnetico \rightarrow memoria veloce e viceversa di un blocco di parole con in testa la sua lunghezza; e ciò a partire da una determinata cella di memoria.

Il trasferimento Tamburo Magnetico \rightarrow memoria veloce avviene in memoria veloce a cominciare dalla prima parola utile del blocco mentre il numero di parole contenuto in un blocco può essere conservato in una cella parametrica.

Da notare la grande flessibilità del sistema che offre la possibilità di trasferimenti a numero di celle ed a blocchi variabili.

Il Nastro Magnetico (N.M.) ha le seguenti caratteristiche: 250000 celle di memoria; 60 μ s di tempo di trasferimento; 2 ms di tempo d'accesso considerando il blocco indirizzato già posizionato.

Dispone di 3 istruzioni:

- Una per la ricerca del blocco di un nastro determinato.

La ricerca si svolge mentre il calcolatore seguita ad operare e l'istruzione dà contemporaneamente l'indirizzo dell'unità a nastro e quella del blocco.

- Due istruzioni di trasferimento a blocchi variabili nei due sensi, del tutto simili a quelle descritte per il Tamburo Magnetico.

Il sistema anche qui si mostra particolarmente flessibile confrontato a quello di altri calcolatori che difficilmente realizzano contemporaneamente il funzionamento a blocchi variabili e la ricerca indipendente del blocco.

Per un confronto diretto tra le velocità di impiego del Tamburo Magnetico e del Nastro Magnetico osserviamo quanto segue:

ammesso un blocco medio di 100 celle e non considerando il blocco indirizzato già posizionato, abbiamo un tempo di accesso variabile da 2 ms a 20 s.

Mentre però con un programma ottimizzato spazialmente (quando ad esempio il nastro è usato come libreria di sotto programmi) il limite superiore si riduce notevolmente, con una ottimizzazione spazio-temporale ed in programmi particolari la velocità di impiego del nastro può essere vantaggiosamente confrontata con quella del Tamburo Magnetico.

Per l'Entrata-Uscita abbiamo ancora 4 istruzioni.

- Una istruzione per l'entrata di un carattere della Telescrivente o da uno dei Lettori fotoelettrici.
- Una istruzione per l'uscita di un carattere verso lo stampatore parallelo, il perforatore veloce o la telescrivente.

In ambedue, l'indirizzo dell'istruzione determina l'organo prescelto in Entrata e in Uscita dando la possibilità di aggiungere un numero sufficientemente grande di nuove apparecchiature assegnando ad esse nuovi indirizzi.

- Una istruzione per la lettura a blocchi dal Lettore fotoelettrico per l'introduzione diretta di programmi senza conversione.
- Una istruzione di stampa per lo stampatore parallelo.

Questa istruzione permette la stampa dei dati α -numerici mentre il calcolatore seguita ad operare. Ciò viene ottenuto corredando l'organo stampante di una memorietta ausiliaria da riempirsi a velocità di macchina con l'istruzione di uscita.

Il Quadro di comando manuale è stato studiato in modo da rendere il più possibile semplici e rapide le operazioni manuali dell'operatore.

Esso è provvisto inoltre di una serie di indicatori e di dispositivi per agevolare le operazioni di controllo tecnico della macchina.

6. - Considerazioni generali.

Durante l'impiego delle apparecchiature ausiliarie il controllo permette la sincronizzazione del calcolatore sulle diverse velocità delle apparecchiature ausiliarie.

Se sopraggiunge un'istruzione riguardante un organo esterno ancora impegnato da una istruzione precedente (organo « non pronto ») il calcolatore cessa di operare ed attende che questi divenga « pronto ». Dopo di che automaticamente torna ad operare.

Non possono essere impegnate contemporaneamente più apparecchiature ausiliarie ad eccezione del periodo di stampa per lo stampatore e della ricerca

di blocco per il Nastro Magnetico. (In questo caso non possono essere effettuate ricerche contemporanee su nastri diversi.)

È previsto di utilizzare i tempi morti delle Entrate ed Uscite veloci (tempo di spostamento di un carattere da una posizione all'altra di lettura per il lettore fotoelettrico e tempo di stampa per lo stampatore parallelo) per il cambiamento di rappresentazione da decimale codificato a binario puro, da eseguirsi su programma all'interno del nucleo centrale.

Non è esclusa la possibilità di effettuare a parte il cambiamento di rappresentazione da mezzi perforanti su Nastro Magnetico e viceversa impiegando un altro piccolo calcolatore (ad es. la Macchina Ridotta).

In tal caso, utilizzando come Entrata e Uscita i nastri magnetici del calcolatore in progetto, si verrebbe ad operare in Entrata e Uscita ad una velocità media di circa 70 000 caratteri al secondo nettamente confrontabile con la velocità di base del calcolatore stesso.

7. - Cenni sul problema dei collegamenti a distanza.

Per un grande calcolatore destinato a servire Istituti Scientifici diversi e lontani sorge il problema di trasmettere rapidamente a distanza dati e programmi.

Mentre per i dati il problema è evidente, nel caso di programmi possono darsi due eventualità.

Una in cui il ricercatore lontano, dovendo risolvere problemi particolarmente complessi, debba raggiungere il centro di calcolo per i contatti necessari.

L'altra in cui i programmi siano affrontabili direttamente dal ricercatore con la programmazione automatica.

È in quest'ultimo caso che sorge la necessità della prova rapida a distanza di pezzi di programmi con ricezione altrettanto rapida dei risultati.

Il problema può essere affrontato con i normali mezzi di comunicazione ma esiste anche la possibilità di risolverlo con l'impiego dei mezzi di telecomunicazione.

Negli Stati Uniti si ha già una buona esperienza su problemi del genere, ed essi vengono soddisfacentemente risolti con trasmissione diretta su telescrivente a 5 canali, considerata la più esente da errori.

Anche lo standard Italiano per le linee e le apparecchiature funziona su 5 canali non controllati mentre l'ingresso del nostro calcolatore è a 7 canali, di cui uno di controllo.

Il problema può essere facilmente risolto fuori della macchina con una apparecchiatura di conversione di codice che trasformi la banda ricevente da 5 a 7 canali e viceversa; oppure aggiungendo alla macchina un'entrata-uscita a cinque canali corredata da opportuno programma di conversione.

Il controllo sulla trasmissione di linea viene sostanzialmente risolto con la trasmissione doppia della banda ed il controllo dell'equivalenza all'arrivo.

Per l'attrezzatura dei Centri lontani è sufficiente una telescrivente-rice-trasmittente munita di perforatrice ed un trasmettitore automatico del costo complessivo di 500 000 lire.

I problemi economici riguardanti i costi di trasmissione e di esercizio, quelli connessi all'organizzazione di un efficiente esercizio di ricezione e risposta, come pure uno studio più approfondito di tutto il problema sta nei programmi futuri del Centro.

S U M M A R Y

A description is given of the connections between memories, input-output units and the central part of the computer under construction at the Center of Pisa. The logical design takes into account the possibility of future enlargement of the external units and auxiliary memories of the Computer. The possibility has further been considered of direct connections between the Center of Pisa and other scientific centers interested in the use of the computer.

Criteri elettronici di progettazione della calcolatrice del C.S.C.E. - I (*).

G. CECCHINI (**), G. B. GERACE (***) e S. SIBANI (**)

Centro Studi Calcolatrici Elettroniche dell'Università - Pisa

(ricevuto il 28 Dicembre 1958)

Riassunto. — Si espongono i criteri elettronici e costruttivi adottati nella costruzione della « Macchina Ridotta » attualmente funzionante presso il Centro Studi Calcolatrici Elettroniche della Università di Pisa.

La costruzione di questo calcolatore ha dato luogo ad una serie di decisioni di carattere sia generale (tipo, struttura), sia particolare (suddivisioni, elementi, tensioni e così via).

Le prime decisioni, quelle che determinarono in sostanza il tipo di calcolatore, furono legate alle funzioni di tale macchina. Pensata come mezzo per risolvere problemi di carattere scientifico, dando quindi ad essa tutte le caratteristiche di una macchina di tipo universale (general purpose), essa necessitava di alta velocità di calcolo e di grande flessibilità di programmazione.

L'alta velocità di calcolo ha portato ad una macchina di tipo parallelo, nella quale cioè tutte le cifre binarie componenti il numero o l'istruzione vengono simultaneamente trattate.

Si è inoltre voluta una semplicità concettuale di progetto, semplicità che si traduce in una grande semplificazione costruttiva.

Perciò si è reso asincrono il funzionamento della macchina, adottando il criterio che le informazioni vengono trasmesse sotto forma di livelli e non di

(*) Presentato al XLIV Congresso della Società Italiana di Fisica, Palermo, 6-11 Novembre 1958.

(**) Distaccato dalla S.p.A. Olivetti presso il C.S.C.E.

(***) Distaccato dalla Sezione di Pisa dell'I.N.F.N. presso il C.S.C.E.

(*) Attualmente presso la S.p.A. Olivetti.

impulsi; ciò ha portato ad una estrema semplificazione del controllo ed ha reso possibile la progettazione di un semplice addizionatore simultaneo ad alta velocità.

Il parallelismo del calcolatore ha come conseguenza il forte numero di parti che si ripetono identicamente. Questo ha dato quindi luogo allo studio di una opportuna naturale suddivisione costruttiva del complesso, in modo da permettere una facile sostituibilità delle parti in caso di guasto, e, particolare non trascurabile, alla possibilità di una lavorazione, di un montaggio e di un controllo in serie, modo di operare che permette soprattutto di avere maggiori garanzie di sicurezza nella fase costruttiva.

A questa concezione del calcolatore in parti staccate, ha fatto seguito il problema del collegamento di queste parti fra loro.

Si è sistematicamente seguito il criterio di disaccoppiare gli organi fra loro, progettandoli in modo che presentassero sempre basse impedenze di uscita ed alte impedenze d'entrata. Si può in sostanza praticamente dire che nessun organo trasferisce corrente in un altro. Ne consegue che essendo state standardizzate le impedenze di entrata e di uscita, non esiste nessun problema per quanto riguarda l'accoppiamento dei vari organi fra loro, esclusione fatta per le capacità parassite dei fili di connessione. Va notato però che nei circuiti in continua le capacità parassite possono solo rallentare ma non pregiudicare il funzionamento della macchina. Infatti esse possono aumentare il tempo necessario per una determinata variazione di tensione senza alterarne però il valore finale.

Inoltre i collegamenti fra organo ed organo sono stati realizzati con fili semplici perchè sono quelli che nelle condizioni di lavoro consentono le minori capacità parassite. D'altra parte l'uso di cavi coassiali chiusi sulla propria impedenza caratteristica, avrebbe condotto ad erogazione di correnti proibitive.

La trasmissione delle informazioni sotto forma di livelli adottate per le grandi semplificazioni circuitali, presenta due aspetti negativi.

Il primo è la maggiore dissipazione di energia del calcolatore ed il secondo è il problema dello spostamento dei livelli, fenomeno del resto ben conosciuto in tutte le trasmissioni in continua.

Quest'ultimo problema dà luogo ad un accurato studio sulla lunghezza massima delle catene di trasmissione, ossia sul massimo numero ammissibile di organi posti in serie in relazione all'elemento che utilizza i livelli stessi alla fine della catena.

La soluzione di questo problema necessita una serie di decisioni sul tipo di tubo usato nella catena, sulla scelta delle tensioni e sulla loro tolleranza, sul tipo di resistore con riferimento alla sua tolleranza ed alla sua classe.

Come si vede queste decisioni divengono un problema generale di macchina e possono venire prese solo quando si tenga conto di tutti i problemi.

Nella scelta dei tubi si è sempre, ove possibile, osservato il criterio di usare

tubi a lunga vita, particolarmente studiati per il funzionamento a scatto (on-off).

Ciò ha portato ad usare su larga scala il tubo E88CC di eccezionali prestazioni, che presenta il vantaggio di potere erogare forte corrente con bassa tensione anodica e quindi con basse dissipazioni. Si noti il vantaggio dell'uso su larga scala di un solo tipo di tubo in modo da facilitare la manutenzione.

Per alcune parti della macchina, specificatamente nella memoria, non si sono trovati in commercio tubi professionali specificatamente studiati per lavorare on-off. Ci si è rivolti pertanto a tubi commerciali (EL84) che, dato il modo di operare, ci garantivano analoga sicurezza di funzionamento nel tempo.

Le tensioni di segnale, unificate in tutta la macchina, si ottengono mediante due tensioni di riferimento, il $+10$ ed il -14 .

Queste tensioni sono asimmetriche, dato che la tendenza delle catene è di spostare più sensibilmente il livello inferiore verso l'alto di quanto avviene per l'altro livello.

Le due tensioni, tenuto conto dei relativi spostamenti ora citati, sono state giudicate sicure per pilotare i circuiti a scatto e gli invertitori.

Conseguenza di questa scelta è stata quella delle tensioni di alimentazione delle reti a diodi in $+50$ V — 50 V che consentono il migliore compromesso tra assorbimento di corrente e dissipazione della rete stessa.

Queste due tensioni, oltre che per alimentare le reti a diodi, sono pure usate nei circuiti con tubi e permettono di minimizzare gli spostamenti dei livelli.

Insieme al $+50$ V e -50 V si sono utilizzati pure il $+150$ V e -150 V.

Si ottiene con queste due ultime tensioni il risultato di avere anodiche adeguate per i tubi amplificatori ed un negativo convenientemente elevato al quale riportare i partitori di segnale senza troppo sacrificio per l'amplificazione.

Per la memoria si è inoltre sentita la necessità di una nuova tensione di alimentazione dei tubi finali di potenza e per l'amplificatore di lettura, tensione fissata in $+200$ V.

Tutte le tensioni di alimentazione hanno una tolleranza del $\pm 2\%$, che corrisponde ad un ragionevole compromesso tra le esigenze di stabilità delle tensioni ed il costo.

Per ciò che si riferisce ai resistori si sono adottati elementi ad alta stabilità e con ristretta tolleranza per facilitare il problema degli spostamenti dei livelli.

Il resistore è del tipo metallico depositato sotto vuoto.

SUMMARY

The criteria adopted in planning the « Reduced Machine » at present working at the « Centro Studi Calcolatrici Elettroniche » of Pisa University are discussed.

Criteri elettronici di progettazione della calcolatrice del C.S.C.E. - II (*).

G. CECCHINI (**) e G. B. GERACE (***)

Centro Studi Calcolatrici Elettroniche dell'Università - Pisa

(ricevuto il 28 Dicembre 1958)

Riassunto. — Si discutono i risultati forniti dall'esperienza sulla « Macchina Ridotta » e si accenna ad alcuni nuovi criteri adottati nella progettazione della « Macchina Definitiva » in costruzione presso il Centro Studi Calcolatrici Elettroniche dell'Università di Pisa.

L'esperienza effettuata sulla « macchina ridotta » è stata di grande importanza ai fini della progettazione elettrica della « macchina definitiva ».

Essa ha permesso di apportare modifiche ad alcuni circuiti, di mutare criteri di scelta di componenti, di precisare problemi non del tutto chiariti, di dare al progettista garanzia e sicurezza su determinate scelte di impostazioni.

Questa esperienza ci permette di pensare ora alla « macchina definitiva » come ad una macchina di sicure prestazioni e, pertanto, di comodo esercizio.

Il lavoro che ha condotto alla definizione del progetto della « macchina definitiva » è consistito sia in un riesame critico complessivo, nel senso sopra specificato, sia nello studio di problemi nuovi, quali quello dell'analisi statistica del comportamento dei tubi con riferimento alle loro correnti di griglia e dell'introduzione di un comodo sistema di controllo della macchina.

(*) Presentato al XLIV Congresso della Società Italiana di Fisica, Palermo, 6-11 Novembre 1958.

(**) Distaccato dalla S.p.A. Olivetti presso il C.S.C.E.

(***) Distaccato dalla Sezione di Pisa dell'I.N.F.N. presso il C.S.C.E.

Gli argomenti trattati possono pertanto essere così elencati:

- 1) Esame del comportamento dei componenti.
- 2) Precisazione del concetto di durata nei tubi a lunga vita.
- 3) Esame e modifica di circuiti dimostrativi critici.
- 4) Analisi delle cause generatrici di disturbi di origine elettromagnetica.
- 5) Analisi statistica dell'andamento delle correnti di griglia nei tubi in relazione all'invecchiamento.

6) Introduzione di un sistema capace di controllare le diverse parti della macchina e di denunciare, con un determinato preavviso, eventuali disfunzioni.

Passiamo ora ad una descrizione dettagliata dei vari punti.

1) Tutti i componenti usati nella « macchina ridotta » hanno dato ottimi risultati, eccettuato i resistori.

Nella scelta di questi così fondamentali componenti ci si era rivolti verso un tipo ottenuto mediante deposizione metallica sotto vuoto e garantito di qualità superiore alla classe 0.5 delle norme tedesche.

In realtà si è osservato che dopo sole 1500 ore di vita (ovviamente a carico e temperatura nominali) circa il 20% di tali resistori è andato al di là del valore fissato dalla tolleranza ammissibile (questa tolleranza è data dal valore di tolleranza iniziale più il valore della classe).

Lo spostamento è unidirezionale e nel senso di accrescimento del valore.

La spiegazione del fenomeno potrebbe probabilmente attribuirsi ad una imperfetta deposizione dello strato metallico, causa di un sovrariscaldamento di alcune zone e conseguente evaporazione dello strato.

Questo modo di vedere potrebbe venire convalidato dal fatto che le deviazioni più alte si hanno per resistori di valore più grande.

Il componente è stato pertanto sostituito con un tipo di precisione a pellicola di carbonio lungamente stagionata, che, da prove sperimentali effettuate presso il nostro laboratorio, ha mostrato un ottimo comportamento.

2) Nella progettazione iniziale della « macchina ridotta » non si era seguito un concetto unitario che tenesse conto delle variazioni delle caratteristiche dei tubi durante il funzionamento.

Era stato dato ad ogni buon conto, un margine di sicurezza, ma senza un approfondito esame del comportamento dei tubi. Inoltre questo margine non era stato unificato, ma era stata lasciata la decisione al buonsenso del progettista. Già prima dell'inizio della costruzione della « macchina ridotta » si prese in esame questo problema e si esaminarono i circuiti nel loro comportamento con variazioni percentuali nelle correnti, da inizio a fine vita, da +15% a -30%; limiti che risultarono essere stati, nella quasi totalità dei casi, notevolmente

superati. Dopo la costruzione della « macchina ridotta » il problema fu decisamente affrontato e fu messo in luce il fatto che un tubo viene considerato a fine vita quando ha raggiunto il — 30% della G_m nominale, corrispondente, ad esempio per il tipo E88 CC che rappresenta la quasi totalità dei tubi usati e per le condizioni di lavoro normalmente usate, ad un — 50% del valore nominale delle correnti.

Per la macchina definitiva questo è stato considerato il limite inferiore del tubo E88 CC, per cui cioè i diversi circuiti possono ancora lavorare con sicurezza. Analoghe considerazioni si estendono per tutti gli altri tipi che però, ripetiamo, corrispondono ad una piccola percentuale del totale dei tubi.

3) L'osservazione del comportamento della « macchina ridotta » ha portato alla determinazione di circuiti dimostratisi critici o non adeguatamente progettati. Si sono pertanto modificati nel nuovo progetto il registro standard, il distributore di impulsi e quello dei segnali, e l'invertitore standard.

Per il resto si è rifatta la verifica con i nuovi limiti precisati sopra, tenendo opportunamente conto del fenomeno del quale si parlerà al punto 5) e riscontrando l'ottimo proporzionamento dei circuiti.

4) All'ingresso dei decodificatori della Memoria si sono riscontrati disturbi di entità tale da indurre in errore il calcolatore. Questi decodificatori sono collegati con l'unità di calcolo mediante fili di lunghezza di circa 2 metri posti in vicinanza di altri fili portatori di informazioni. Si sono effettuate lunghe prove che hanno definito di origine elettromagnetica la causa del fenomeno.

Le brusche variazioni di livello nei fili portatori di informazioni producono variazioni di corrente che, trascurando la componente induttiva, sono funzione, all'istante di inizio dal fenomeno, solo della pendenza del fronte di tensione dato dal generatore e della sua resistenza interna.

5) Si è sperimentalmente dimostrato che le correnti di griglia del tubo E88CC hanno una variazione con l'invecchiamento del tubo, nel senso di diminuire allorché diminuiscono le correnti di placca del tubo stesso. Questo problema quindi va ricollegato con il fenomeno della variazione di emissione del catodo col tempo, come lo è per le correnti anodiche.

Si sono fatte lunghe ed accurate prove per accertare le entità di queste variazioni e si è notato lo stretto collegamento esistente fra le due variazioni di corrente di griglia e placca. Questo fenomeno è stato utilizzato per diminuire l'effetto delle variazioni delle caratteristiche dei tubi, mediante l'effetto di compensazione esercitato da una resistenza posta in serie alla griglia stessa.

È stato reso pertanto più agevole il problema della minimizzazione degli spostamenti dei livelli positivi di segnale lungo la catena di trasmissione in continua ed in particolare si è resa possibile una più larga stabilizzazione delle correnti negli amplificatori funzionanti con griglia positiva (invertitori ed elementi a scatto).

6) Si è infine studiato un semplice, efficace sistema di controllo di macchina che permetterà di seguire l'andamento complessivo nel tempo di ogni catena di trasmissione e di ogni organo e di individuare l'elemento che si avvicina alla zona di criticità di operazione con largo margine di tempo, in modo da facilitare al massimo l'operazione di sostituzione.

Questo sistema verrà corredato da programmi appositamente studiati che permettono di realizzare le condizioni più sfavorevoli per l'organo da controllare. Il sistema si basa sul concetto di disturbare di volta in volta le varie catene nelle quali la macchina può essere suddivisa e di determinare l'entità del disturbo necessario per indurre in errore il calcolatore.

La determinazione del punto di errore può essere fatta con sicurezza solo mediante un opportuno programma che permetta alla macchina stessa di avvertire l'operatore quale è l'elemento singolo della catena in esame che ha provocato l'errore. Prove di controllo fatte sulla « macchina ridotta » hanno dato ottimi risultati e lasciano sperare in una semplice, comoda e veloce routine di controllo giornaliero della « macchina definitiva ».

SUMMARY

Experience acquired from the « Reduced Machine » is described together with some new criteria adopted in planning the « Final Machine » which is being built at the « Centro Studi Calcolatrici Elettroniche » of Pisa University.

Dispositivo atto a selezionare nella radiazione cosmica eventuali particelle di massa intorno a $550 m_e$ (*).

M. CONVERSI, G. M. DE' MUNARI, A. EGIDI, E. FIORINI, S. RATTI, C. RUBBIA
C. SUCCI e G. TORELLI

Istituti di Fisica delle Università - Milano e Pisa
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezioni di Milano e Pisa

(ricevuto il 28 Dicembre 1958)

Riassunto. — Si descrive il dispositivo utilizzato al fine di controllare l'esistenza recentemente segnalata da ALIHANIAN *et al.* ⁽¹⁾ di particelle di massa intorno a $550 m_e$. Si discutono le caratteristiche dell'apparato le cui prestazioni sono tali da garantire una completa eliminazione del « fondo » ed un sicuro riconoscimento delle eventuali particelle ricercate.

1. — Una comunicazione di ALIHANIAN *et al.* al Congresso di Mosca del 1956 ⁽¹⁾ ha risvegliato l'interesse sul problema delle particelle di massa intermedia tra la massa del pione e quella del mesone K, l'esistenza delle quali si sospettava in base ad indicazioni non conclusive di vari autori ⁽²⁾. ALIHANIAN ed i suoi collaboratori, riportando i risultati di una serie di esperienze sullo spettro di massa delle particelle cariche della radiazione cosmica, hanno presentato

(*) Presentato al XLIV Congresso della Società Italiana di Fisica, Palermo, 6-11 Novembre 1958.

(¹) A. I. ALIHANIAN *et al.*: *Intern. Conference on High Energy Physics* (Mosca, Maggio 1956). Cfr. A. I. ALIHANIAN, N. V. ŠOSTAKOVIČ, A. T. DADAIAN, N. V. FEDOROV e B. N. DERIAGIN: *Žurn. Èksp. Teor. Fiz. (U.S.S.R.)*, **31**, 955 (1956); *Soviet Phys. Journ. Exp. Theor. Phys.*, **4**, 817 (1957) e bibliografia ivi contenuta.

(²) J. G. RETALLACK and R. B. BRODE: *Phys. Rev.*, **75**, 1716 (1949); R. B. BRODE: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 37 (1949); P. R. DANIEL and H. D. PERKINS: *Proc. Roy. Soc.*, **A 221**, 351 (1954) e bibliografia ivi riportata.

in effetti una concreta evidenza in favore della esistenza di particelle di massa prossima a 550 masse elettroniche (*).

Il dispositivo sperimentale impiegato da ALIHANIAN *et al.*, è costituito da uno spettrometro magnetico interposto tra due camere di Wilson a lastre. La misura della massa viene ricavata dalla curvatura della traiettoria della particella e dal «range» misurato nella camera inferiore che contiene lastre di piombo. La camera a lastre superiore consente di riconoscere se le particelle in esame provengono o meno da interazioni locali. Lo spettro di masse ottenuto per le particelle che non provengono da interazioni locali presenta un picco molto netto, costituito da 11 particelle con masse distribuite intorno a $530 m_e$.

ALIHANIAN *et al.* concludono in definitiva che esistono nella radiazione cosmica particelle dotate delle seguenti caratteristiche:

- a) massa prossima a $550 m_e$;
- b) carica prevalentemente negativa (9 particelle negative e 2 positive);
- c) produzione non locale; (e quindi vita media presumibilmente abbastanza elevata);
- d) percentuale relativa ai mesoni μ nello stesso intervallo di «range» $\sim 0.5\%$.

La bassa frequenza delle particelle 550 e la mancanza di informazioni sul decadimento, ci hanno indotto a dare particolare peso, nella progettazione del nostro apparato, al problema della eliminazione del «fondo». Quest'ultimo è essenzialmente dovuto a possibili interazioni nucleari delle particelle selezionate dall'apparato. Più precisamente se, come nell'esperienza del gruppo di Alihanian, le determinazioni di massa sono ricavate da misure di percorso e di curvatura in campo magnetico, per le particelle che subiscono interazioni nucleari si trova una massa apparente più grande di quella reale ⁽³⁾. Con questo sistema di misura il pericolo di registrare particelle 550 spurie è rappresentato quindi da mesoni π . Se la determinazione di massa si basa invece su misure di ionizzazione e di percorso residuo, le particelle che subiscono interazioni presentano una massa apparente inferiore a quella reale ⁽³⁾. In tal caso il pericolo di registrare particelle 550 spurie deriva essenzialmente da protoni interagenti.

Nella esperienza di cui in questa comunicazione si descrive il dispositivo, abbiamo scelto questo secondo metodo di misura per ottenere un angolo solido

(*) Indicate nel seguito con l'abbreviazione «particelle 550».

⁽³⁾ M. CONVERSI, G. M. DE' MUNARI, A. EGIDI, E. FIORINI, S. RATTI, C. RUBBIA, C. SUCCI e G. TORELLI: *Ricerca sull'esistenza di particelle di massa intorno a $550 m_e$, nella radiazione cosmica*. Comunicazione al XLIV Congresso della S.I.F. Cfr. anche C. RUBBIA: *Tesi di laurea* (Università di Pisa, 1957).

di accettazione sufficientemente grande. Tale esperienza (che si sta ora concludendo al Laboratorio Raggi Cosmici del Sabbione (Novara) a 2550 m s.m.) è stata intrapresa al fine di controllare l'esistenza delle particelle 550 ed eventualmente di studiarne le proprietà.

2. - Il dispositivo sperimentale impiegato in una prima serie di misure è presentato in Fig. 1: A , B , C , D ed E sono contatori di Geiger-Müller; S_c ed

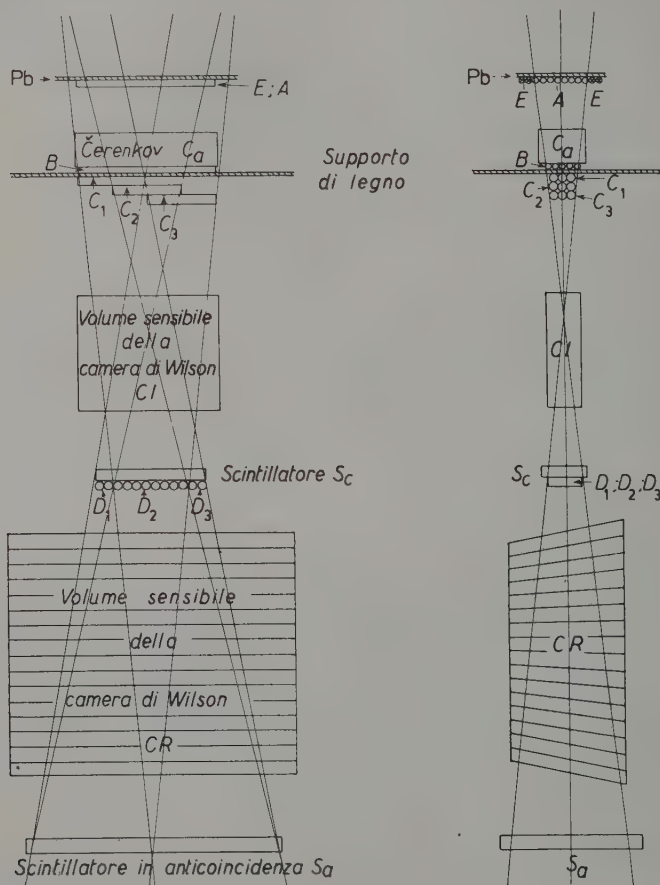


Fig. 1. - Disposizione dei rivelatori e delle camere di Wilson nella 1^a serie di misure ($\Omega = 10.5 \text{ cm}^2 \text{ sr}$).

S_a scintillatori liquidi; C_a un contatore di Čerenkov; CI e CR due camere di Wilson di cui la seconda a lastre. Le coincidenze $C_1 D_1$, $C_2 D_2$, $C_3 D_3$ tra i gruppi di contatori C e D indicati in figura, definiscono l'angolo solido totale di accet-

tazione, interamente coperto, al di sotto della camera di Wilson inferiore (CR), dallo scintillatore S_a posto in anticoincidenza. In tal modo si selezionano le particelle che terminano il loro percorso nella camera CR dopo aver attraversato la camera superiore CI.

Il contatore di Čerenkov C_a , in anticoincidenza, impedisce che la componente molle ed i mesoni leggeri (π e μ) comandino le camere. Alla eliminazione della componente molle contribuiscono anche i contatori E in anticoincidenza ed i contatori A e B in coincidenza, separati da uno schermo di Pb di 1.5 cm di spessore.

La determinazione di massa delle particelle che si arrestano nelle lastre di CR viene generalmente ⁽³⁾ ricavata dalla misura della perdita di energia nello scintillatore proporzionale S_c e dalla misura del percorso residuo in CR.

Data la buona risposta dello scintillatore S_c la camera CI, inizialmente destinata a misure di ionizzazione, è stata usata solo per controllare l'allineamento delle tracce delle particelle in esame nelle due camere onde facilitare il riconoscimento delle eventuali interazioni nucleari tra lo scintillatore S_c e la camera CR.

Un ulteriore forte criterio per la identificazione delle particelle in esame è fornito dalla camera CR che contiene 17 lastre di plexiglas di 0.3 cm di spessore. In effetti:

a) il sottile spessore delle lastre facilita il riconoscimento delle interazioni;

b) l'elevato numero dei « gaps » a disposizione permette una stima abbastanza accurata della massa in base alla variazione di ionizzazione ed allo scattering della particella ⁽³⁾;

c) il basso numero atomico del materiale usato per le lastre rende minimo lo scattering coulombiano e quindi più evidenti le deflessioni dovute alle interazioni nucleari.

Per una seconda serie di misure attualmente in via di conclusione, il dispositivo sperimentale precedentemente impiegato è stato modificato come in Fig. 2 allo scopo di ottenere un maggiore angolo solido di accettazione ($17.5 \text{ cm}^2 \text{ ster}$ in luogo di $10.5 \text{ cm}^2 \text{ sr}$), ed una ulteriore informazione sulla massa delle particelle osservate. Come risulta dalla figura, la camera di Wilson CI è stata sostituita da un secondo contatore di Čerenkov C_c il cui impulso non viene utilizzato per la selezione elettronica del comando bensì in sede di analisi. Il contatore C_c permette un immediato riconoscimento degli eventi generati da protoni. Infatti lo spessore che lo separa dalla camera CR è calcolato in modo che le particelle che si arrestano in CR perdendo energia solo per ionizzazione (cioè senza subire interazioni nucleari) eccitano C_c soltanto se la loro massa è inferiore a $\sim 1000 m_e$. D'altra parte un protone che produce luce

attraversando C_r , perde nel contatore proporzionale S_c una energia decisamente inferiore a quella di una particella 550 che si fermi nella camera CR.

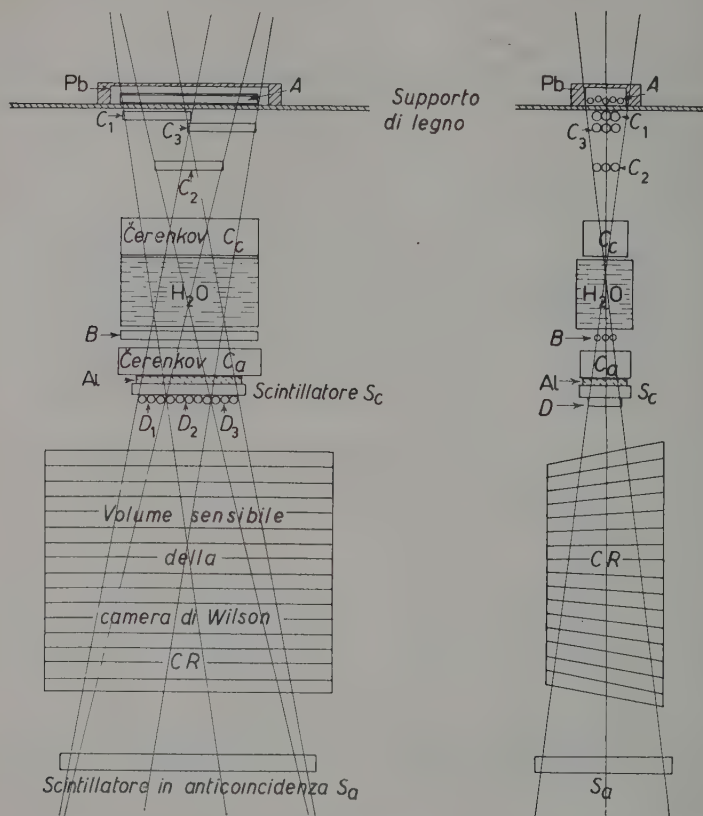


Fig. 2. - Disposizione dei rivelatori e della camera di Wilson nella 2^a serie di misure ($\Omega = 17.5 \text{ cm}^2 \text{ sr}$).

Gli spessori compresi in entrambe le serie di misure tra C_a e CR sono tali da escludere che una particella 550 che si fermi in CR produca luce in C_a . È opportuno osservare, a questo proposito, che è stato necessario aggiungere, nella seconda serie di misure, 3 cm di Al al di sotto del contatore C_a per ottenere una completa eliminazione dei mesoni μ .

Nelle misure della seconda serie, quindi, i due contatori di Čerenkov ed i due scintillatori costituiscono un selezionatore di masse che accetta soltanto particelle di massa intermedia tra i mesoni leggeri e i protoni.

Le caratteristiche dei rivelatori S_c , S_a , C_c e C_a sono riportati in Tab. I; in Tab. II sono riportate le principali caratteristiche delle camere.

TABELLA I. - *Caratteristiche dei rivelatori a scintillazione ed a luce di Čerenkov usati nell'apparato di Fig. 2.*

Rivelatore	Volume sensibile (cm ³)	Tipo	Materiale sensibile	Wave Shifter	Diffusori	Fototubi	Rendimento
C_a	$62 \times 24 \times 12$	Čerenkov	Acqua	Nessuno	MgO	6×6292 Du Mont	0.998 ($\beta > 0.8$)
C_c (*)	$62 \times 24 \times 18$	Čerenkov	Acqua	Nessuno	MgO	12×6291 Du Mont	0.998 ($\beta > 0.8$)
S_c	$48 \times 24 \times 5$	Scintillatore	Toluolo + 3.5 g/l Paraterf.	α NPO	Al	4×6292 Du Mont	~ 1
S_a	$106 \times 62 \times 6$	Scintillatore	Toluolo + 3.5 g/l Paraterf.	α NPO	Al	6×6292 Du Mont	0.997

(*) Usato come contatore di anticoincidenza (C_a) nella disposizione di Fig. 1.

TABELLA II. - *Caratteristiche delle camere di Wilson.*

Camera di Wilson	C I	C R
Dimensioni utili cm ³	$50 \times 40 \times 12.5$	$110 \times 110 \times 50$
Parete superiore plexiglas	0.8 cm	0.8 cm
Parete inferiore	1.8 cm plexiglas	2.5 cm Al
Lastre interne	4 verticali da mm 3 di Al	17 orizzontali da mm 3 di plexiglas

3. - Lo schema di principio dell'apparato elettronico è mostrato in Fig. 3. Gli impulsi dei contatori C_c , C_a ed S_a sono inviati ad altrettanti « gates » aperti, per la durata di circa 100 ns, dagli impulsi del contatore S_c . In tal modo è possibile evitare l'affollamento di impulsi che diversamente si avrebbe sui circuiti di anticoincidenza e sull'amplificatore A.

L'energia persa dalle particelle attraversando lo scintillatore S_c viene registrata fotografando l'impulso di questo rivelatore (opportunamente amplificato) sul tubo di un oscilloscopio; la « sweep » dell'oscilloscopio è comandata dallo stesso impulso che produce l'espansione delle camere di Wilson (Fig. 3). Sulla

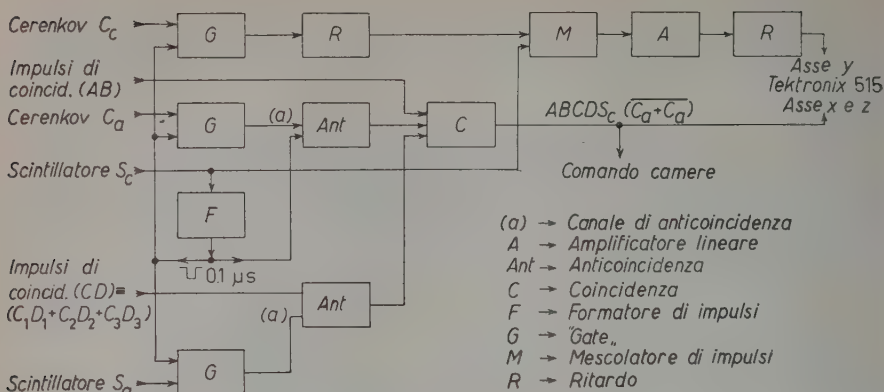


Fig. 3. - Schema a blocchi del dispositivo elettronico che seleziona gli impulsi di comando.

stessa « sweep », nella seconda serie di misure, viene inviato anche l'impulso ritardato del contatore C_c .

Il dispositivo elettronico è stato progettato ponendo particolare attenzione

al problema della stabilità, essenziale in un apparato destinato a lunghi periodi di funzionamento. Particolarmente critici, perchè da essi dipende l'esattezza della misura di massa, sono il rendimento luminoso dello scintillatore S_c e la stabilità dell'amplificatore ad esso connesso: per queste ragioni è stato giornalmente controllato lo spettro di ampiezza degli impulsi di S_c prodotti dalla radiazione cosmica incidente nell'angolo solido di accettazione. Tali spettri (Fig. 4) permettono anche di calcolare volta per volta l'errore della valutazione della perdita di energia nel contatore S_c .

Tutti gli altri controlli, utili per accertare le perfette condizioni di lavoro dell'apparato, si possono eseguire senza perturbarne il funzionamento. In particolare il controllo dei contatori GM viene eseguito a distanza con il circuito schematicamente

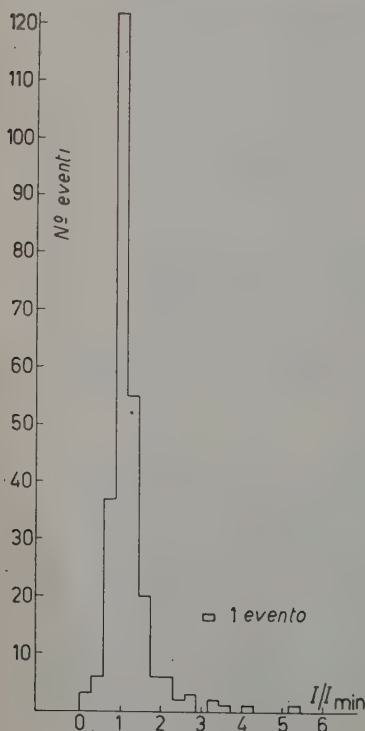


Fig. 4. - Esempio di spettro di controllo dello scintillatore S_c .

indicato nella Fig. 5. Il controllo del rapporto di espansione della camera di Wilson è effettuato con una macchina fotografica tale da permettere il rapido esame del fotogramma e quindi la correzione del rapporto prima dell'espansione successiva.

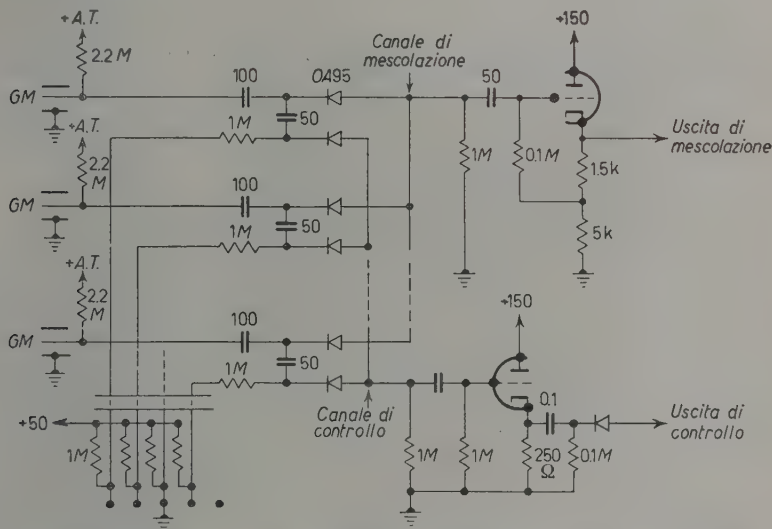


Fig. 5. — Schema del circuito per il controllo a distanza dei contatori di Geiger-Müller.

È opportuno sottolineare, in conclusione, che il dispositivo descritto, pur non consentendo accurate determinazioni di massa, è in grado di fornire una quantità di informazioni tale da garantire una completa eliminazione del fondo ed un riconoscimento sicuro delle eventuali particelle 550.

SUMMARY

The apparatus employed in a search for the 550-mass particles reported by ALIHA-
NIAN *et al.* ⁽¹⁾ is described. Unwanted particles are eliminated electronically by a
suitable arrangement of scintillation — Čerenkov —, and GM-counters. The recorded
particles are observed in a large multiplate Wilson chamber. The mass is essentially
deduced by the combined measurements of range in this chamber and dE/dx in a
proportional liquid scintillator. It is shown that the background of spurious 550-mass
particles is entirely negligible and that genuine 550-mass particles could not be missed.

Impiego della «macchina ridotta» del C.S.C.E. di Pisa nella soluzione di alcuni problemi (*).

E. FABRI (**) e L. GUERRI (**)

Centro Studi Calcolatrici Elettroniche dell'Università - Pisa

(ricevuto il 28 Dicembre 1958)

Riassunto. — Si descrivono i calcoli effettuati o in corso di elaborazione per la «macchina ridotta» e si riferisce su alcune esperienze di moderni metodi di calcolo numerico.

1. — Introduzione.

La Macchina ridotta del C.S.C.E. è entrata in funzione in modo completo verso la metà del 1957. Da allora fino alla fine del 1958 essa è stata disponibile per calcoli per una larga parte del tempo. Sebbene la macchina non fosse stata originariamente prevista per un impiego effettivo, ma solo per collaudi e prove tecniche, è stato possibile svolgervi un discreto lavoro, anche se le limitazioni cui si farà cenno in seguito hanno pesato sulla possibilità di eseguire calcoli di una certa complessità. Esporremo ora, seguendo all'incirca un ordine cronologico, il lavoro svolto sulla Macchina Ridotta (M.R.) indicando per ogni calcolo origine, difficoltà, tempo richiesto per la programmazione e per l'esecuzione, e ogni altro dato che possa riuscire interessante.

(*) Presentato al XLIV Congresso della Società Italiana di Fisica, Palermo, 6-11 Novembre 1958.

(**) Attualmente all'Istituto di Fisica dell'Università di Pisa.

(**) Distaccato dalla Sezione di Pisa dell'I.N.F.N. presso il C.S.C.E.

2. - Studio di strutture di cristalli.

Questo studio si riconduce ad un'analisi diretta e inversa di Fourier.

Nel caso dell'analisi diretta si doveva calcolare:

$$F(x, y) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=-N}^N a_{rs} \cos 2\pi(rx + sy),$$

assegnati gli a_{rs} e N (con $N \leq 15$) e:

$$x = 0d, 1d, 2d \dots 50d,$$

$$y = 0d, 1d, 2d \dots 100d,$$

$d = 0.02$ oppure $d = 0.01$.

I valori distinti del coseno sono 100 (per $d = 0.02$ ne servono solo 50). Questi 100 valori del coseno sono stati incorporati nel programma.

Per $d = 0.02$ si ha un reticolo di 1326 punti. L'intero calcolo comporta $(N+1)(2N+1) \cdot 1326$ moltiplicazioni. La moltiplicazione, non essendo disponibile come istruzione, era eseguita come sottoprogramma. Tempo di calcolo: 1 ora circa di cui $\frac{1}{3}$ impegnato per la stampa dei risultati fatta, carattere per carattere, a mezzo di telescrivente.

Nel caso $d = 0.01$ le cifre e i tempi sopraindicati vanno moltiplicati per 4.

Per l'analisi inversa si doveva calcolare:

$$G(h, k) = \sum_{r=0}^N a_r(h, k) \cos 2\pi(hx_r + ky_r),$$

assegnati:

a) N (con $N \leq 20$);

b) l'insieme dei valori di h e k e dei relativi coefficienti $a_r(h, k)$ ($r = 0, 1, 2 \dots N$).

c) x_r e y_r ($r = 0, 1, 2 \dots N$) compresi fra 0 e 1.

Il coseno era calcolato per mezzo di un sottoprogramma.

Tempo di calcolo: variabile fra 5 e 10 min.

3. Analisi periodale di frequenze critiche ionosferiche e correlazioni con i dati sulle attività solari.

Questo è il calcolo che ha occupato per più lungo tempo la macchina causa la notevole massa di dati da elaborare. Il calcolo constava di due parti: la prima era l'analisi periodale delle frequenze critiche ionosferiche, con la ricerca

delle componenti a periodo 12 h e 24 h nonchè delle componenti a periodo annuale e dell'andamento secolare. Da un punto di vista matematico il problema non presentava alcuna difficoltà: c'era solo la necessità di introdurre un gran numero di dati (circa 25 000 numeri di tre cifre) e di stampare un numero ancora più grande (circa 80 000 di quattro cifre). Tutto il calcolo è stato ripetuto due volte per controllo, e tre o quattro volte nei punti dove si scoprivano errori.

Il tempo effettivo di calcolo era trascurabile rispetto a quello di stampa, nonostante che per ogni numero stampato occorressero in media quattro moltiplicazioni più un numero imprecisato di addizioni e sottrazioni. Questa prima parte del calcolo ha richiesto in totale circa 60 ore di macchina, distribuite però in parecchi giorni a causa di errori, interruzioni varie, necessità di controlli, ecc. Il lavoro di programmazione può essere valutato a 15 giorni di due persone.

La seconda parte del calcolo era matematicamente più semplice della precedente, ma presentava difficoltà di organizzazione. Occorreva infatti utilizzare i risultati della prima parte (già disponibili su nastro perforato) per il calcolo delle somme e somme di quadrati per ogni singola serie di dati; occorreva poi calcolare le somme dei prodotti dei termini di ciascuna delle serie con quelli di ciascuna serie di dati dell'attività solare (preventivamente preparati su nastro). Non è il caso di entrare ora in dettagli sulla questione: basta accennare che il nastro passato attraverso l'organo di entrata della macchina si misura in km. I risultati da stampare erano circa 15 000 numeri di dieci cifre e il tempo impiegato è circa lo stesso della prima parte, con le stesse avvertenze. Il lavoro di programmazione è stato invece alquanto minore: circa 10 giorni di una persona.

4. — Calcolo delle autofunzioni e dei livelli fondamentali di sistemi atomici.

Il lavoro in questione è stato studiato e programmato a titolo di prova da un gruppo dell'Istituto di Chimica Fisica, nel caso della molecola-ione di idrogeno. Il calcolo era condotto con un metodo variazionale-iterativo e ha dato risultati soddisfacenti. Non siamo in grado di valutare il tempo di programmazione, che non si discosta però come ordine di grandezza da quelli già indicati; il tempo di calcolo era molto breve, di alcuni secondi nel caso effettivamente eseguito.

5. — Calcolo dell'equilibrio di un reticolo cristallino.

Il problema era riducibile alla ricerca del minimo di una funzione algebrica di 4 variabili, alquanto complicata causa la presenza di molte radici quadrate. In questo caso non esistevano questioni derivanti dalla mole del lavoro, ma le

limitazioni principali sono derivate dalla scarsa precisione ottenibile (l'uso delle tecniche di « doppia precisione » era impraticabile perchè avrebbe complicato il programma in modo eccessivo rispetto alla importanza del lavoro). Il programma ha effettivamente funzionato, ma senza fornire risultati utili giacchè le variazioni dovute ad arrotondamenti ed approssimazioni nascondevano il minimo reale della funzione. Il tempo di macchina era in questo caso trascurabile; la programmazione ha richiesto 10 giorni di due persone.

6. - Aggiustamento su dati sperimentali di una funzione di prova.

Il calcolo, condotto con il metodo dei minimi quadrati, utilizzava per la ricerca del minimo lo stesso programma impiegato nel caso precedente (calcolo dell'equilibrio di un reticolo cristallino). Il programma ha fornito i risultati voluti, che hanno però mostrato che la scelta della funzione di prova era inadeguata. Il tempo di macchina è stato di qualche ora, quello di programmazione di circa una settimana per una persona.

7. - Ricerche sui metodi di Monte Carlo.

Sono state condotte varie ricerche sull'impiego di tecniche probabilistiche nella risoluzione dei vari problemi. Il lavoro è stato orientato in primo luogo verso la ricerca del più conveniente metodo di produzione di numeri « pseudo-casuali » (*). Si è trovato che buoni risultati si ottenevano con il metodo noto col nome di « serie di Fibonacci », purchè si lavorasse in doppia precisione. Ciò per evitare il presentarsi di quasi-periodi troppo brevi nella successione, che avrebbero impedito la costruzione di statistiche abbastanza ampie senza errori sistematici.

Col metodo accennato, e con altri sperimentati, è stata programmata la risoluzione di sistemi di equazioni lineari.

(*) Conviene accennare che l'impiego di un metodo di Monte Carlo richiede la produzione di eventi casuali, che si può sempre ridurre a quella di numeri casuali. Senza ricorrere a effettive estrazioni o sorteggi, si può ricorrere a tavole di numeri casuali già esistenti; tale procedimento non è però indicato per una macchina con memoria piccola ed entrata non molto veloce, come la nostra M.R. L'altra possibilità è quella di far produrre alla macchina, secondo un processo deterministico, successioni di numeri che abbiano « apparenza casuale », nel senso che la regolarità della successione sia completamente nascosta sotto un'apparente irregolarità. I numeri così ottenuti si dicono pseudo-casuali. Perchè lo si possa accettare, un metodo di produzione di numeri pseudo-casuali deve superare appositi controlli, sui quali non ci possiamo qui soffermare.

Il risultato è stato il seguente: a causa delle limitazioni della macchina non era possibile rendere il metodo di Monte Carlo competitivo con quelli algebrici; ciò a causa dell'eccessivo tempo necessario a produrre il singolo evento casuale.

Un dato indicativo è il seguente: la risoluzione all'1% di un sistema di 10 equazioni si otteneva in alcuni minuti, ma il tempo necessario cresceva col quadrato della precisione richiesta. Il metodo di Monte Carlo è conveniente per precisioni non troppo elevate e con molte equazioni (il tempo di calcolo va infatti col quadrato del numero di equazioni, mentre coi metodi algebrici va col cubo), ma la M.R. non consentiva, causa la scarsità di memoria, di sperimentare i casi interessanti.

Strettamente legata alla soluzione dei sistemi lineari è l'inversione di matrici, che è stata tentata con risultati del tutto analoghi.

Altre prove sono state condotte su equazioni integrali (problemi di sopravvivenza) e su problemi direttamente probabilistici, sempre con risultati simili: si ottenevano facilmente delle soluzioni grossolane, ma il tempo di calcolo diveniva proibitivo se si cercava di raffinare i risultati.

Un'altra difficoltà pratica che conviene accennare è risultata dall'eventualità di errori della macchina: mentre in un calcolo ripetitivo un errore può influire su uno solo o pochi dei molti risultati finali, nel caso dei metodi di Monte Carlo è necessario che nessun errore si verifichi per tutto il tempo del calcolo, pena la perdita totale del lavoro già fatto.

8. — Determinazione esatta delle autofunzioni del momento angolare di più elettroni.

Questo calcolo è descritto in dettaglio in altra comunicazione⁵(*), alla quale si rimanda per ogni notizia.

9. — Varie.

È appena il caso di accennare al lavoro di programmazione preliminare consistente nella elaborazione di tutti i sottoprogrammi che sono stati impiegati nei calcoli descritti; va solo detto che il relativo tempo di programmazione — abbastanza considerevole, data anche l'inesperienza iniziale — non è stato considerato nelle stime date sopra.

(*) E. ABATE ed E. FABRI: *Impiego di una calcolatrice elettronica nella ricerca delle autofunzioni del momento angolare orbitale in accoppiamento di Russel-Saunders.*

Altro tempo è stato preso dalla compilazione di programmi di prova e diagnostici, sia pure molto semplici, necessari per controllare la macchina e scoprire eventuali guasti.

Altri programmi effettivamente eseguiti sulla M.R. vanno meglio catalogati come esercizi e studi di programmazione che come applicazioni pratiche; ad esempio lavori di teoria dei numeri (divisori di un numero, M.C.D., numeri primi, numeri perfetti ecc.) o questioni a carattere combinatorio (permutazioni ecc.).

Tra questi ultimi programmi merita di essere segnalato per la sua complessità logica e per un certo interesse teorico quello per la costruzione di tautologie del calcolo delle proposizioni. Si tratta di un problema di logica simbolica, immediatamente riducibile ad un problema combinatorio: disporre dei simboli di proposizioni, dei simboli di connettivi logici e delle parentesi in modo che le espressioni risultanti, se interpretate secondo opportune regole, risultino formule di proposizioni identicamente vere (tautologie). Il programma ha potuto essere fatto in pochi giorni, ma il tempo di macchina necessario per ottenere tautologie non banali è risultato eccessivamente lungo (giorni o mesi).

SUMMARY

A report is given on problems solved or being solved on the « reduced machine » and on some experiments with modern computing techniques.

Un nuovo tipo di discriminatore differenziale di impulsi rapidi (*).

C. RUBBIA e G. TORELLI

Istituto di Fisica dell'Università - Pisa
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Pisa

(ricevuto il 28 Dicembre 1958)

Riassunto. — Si descrive un nuovo tipo di discriminatore differenziale capace di funzionare con elevate frequenze di ripetizione nonostante la notevole semplicità della sua struttura.

È in corso di realizzazione un discriminatore differenziale multicanale di nuovo tipo che rispetto agli strumenti del genere oggi esistenti, presenta notevoli vantaggi per semplicità ed economia, pur potendo giungere a frequenze di registrazione dello stesso ordine di grandezza. Esso è basato sull'impiego di un tubo Philips a deviazione di fascio (il tubo « E 80 T » costruito come confrontatore di frequenza per apparati televisivi). Questo ha la struttura di un tubo a raggi catodici (Fig. 1) con fascio laminare, mancante naturalmente di una delle coppie di placchette deflettrici. Lo schermo è costituito da una placca che riceve il fascio di elettroni solo quando la differenza di potenziale tra le due placchette D e D' è inferiore a ΔV , (Fig. 2). Forzando la focalizzazione e diminuendo la tensione di schermo si può ridurre la larghezza della curva di risposta senza preoccupanti riduzioni della corrente massima del tubo (Fig. 3).

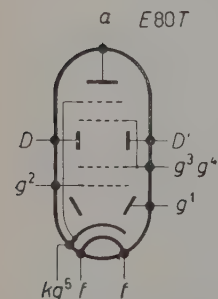


Fig. 1. — Struttura del tubo E 80 T.

L'utilizzazione di questo tubo come discriminatore differenziale è relativamente semplice; si blocca una delle placchette, per esempio la D' , al normale

(*) Presentato al Congresso della Società Italiana di Fisica, Palermo, 6-11 Novembre 1958.

potenziale di funzionamento V_D , e si richiama l'altra placchetta, la D , ad un potenziale $V_D = V_{D'} - V$ ove la tensione V è arbitraria. Se sulla placchetta D si invia un impulso rettangolare di ampiezza \bar{V} proporzionale all'impulso in esame, la E 80 T viene a trovarsi in condizioni di conduzione solo se l'ampiezza dell'impulso è compresa tra $V - \Delta V$ e $V + \Delta V$.

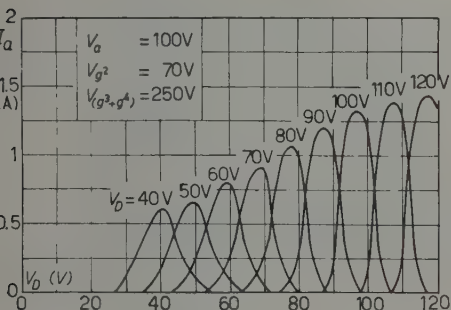


Fig. 2. — Caratteristiche del tubo E 80 T fornite dalla Philips.

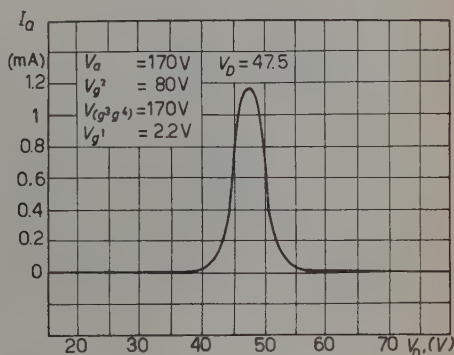


Fig. 3. — Caratteristiche del tubo E 80 T in particolari condizioni di lavoro.

Con N di questi tubi in parallelo e con differenze di potenziale V_n opportunamente graduate tra le due placchette D e D' di ognuno di essi, si ottiene un discriminatore differenziale a N canali ciascuno di larghezza $2\Delta V$.

La buona risposta di questo tubo alle alte frequenze ci ha indotto a studiare, in primo luogo, la possibilità di utilizzare la E 80 T come discriminatore veloce.

Elemento essenziale di un discriminatore di questo tipo è un formatore di impulsi rettangolari, di ampiezza proporzionale all'ampiezza dell'impulso in esame, capace di funzionare correttamente con alte frequenze di ripetizione.

Un primo modello di formatore è disegnato in Fig. 4. Esso trasforma il breve impulso da analizzare in un impulso la

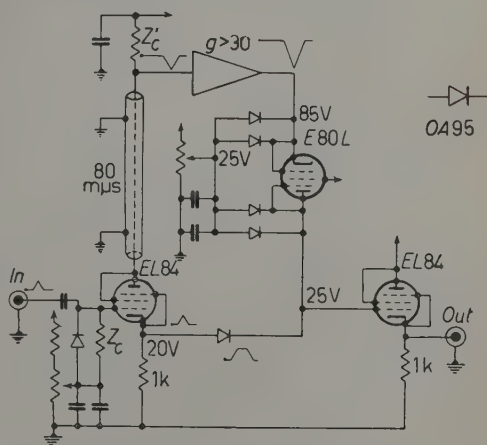


Fig. 4. — Schema di principio del formatore di impulsi.

cui durata è controllata da una linea. I difetti di un tale sistema, (non per fetta linearità tra ingresso e uscita, frequenza non superiore a ~ 10 MHz) derivano essenzialmente dalla capacità presente tra la placca ed il catodo dei diodi. Ciò giustifica l'utilizzazione del pentodo E 80 L (Fig. 4) in sostituzione di un diodo che avrebbe in ogni caso una capacità più elevata.

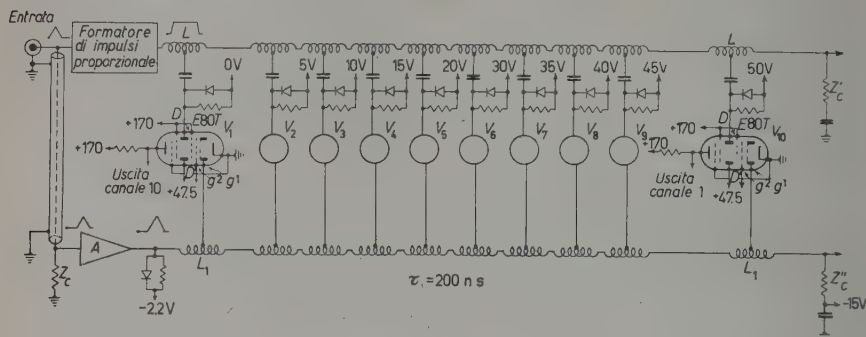


Fig. 5. - Schema di principio del discriminatore differenziale.

Questo formatore deve anche fornire un impulso di accensione per le E 80 T durante la parte centrale dell'impulso in esame; nel nostro montaggio infatti le E 80 T sono normalmente interdetto.

La realizzazione di un discriminatore differenziale con E 80 T presenta essenzialmente una difficoltà: la struttura della E 80 T è infatti tale che quando il fascio di elettroni non cade sulla placca esso viene assorbito dalla placchetta a potenziale superiore. Questo effetto provoca perturbazioni solo nei canali inferiori (*) a quello interessato, perchè solo in tali canali il fascio elettronico colpisce la placchetta *D* che riceve l'impulso in esame.

Bastano però opportuni accoppiamenti induttivi tra le placchette *D* dei vari canali per evitare che tali perturbazioni giungano sulla placchetta della valvola interessata in tempo per disturbarne il funzionamento. Ciò si realizza accoppiando le placchette *D*, ed anche le griglie di accensione *g*₁ degli *N* canali con linee di ritardo in maniera analoga a quanto si fa in un amplificatore distribuito.

Se l'impulso su tali linee si propaga dall'ennesimo canale al primo, le perturbazioni, che si generano solo nei canali inferiori a quello interessato, possono raggiungere questo solo con un certo ritardo rispetto al segnale di accensione.

(*) Intendiamo per canali inferiori quelli destinati ad accettare gli impulsi di ampiezza inferiore all'ampiezza dell'impulso in esame.

Tale ritardo è evidentemente uguale al doppio del tempo di transito tra stadio e stadio delle linee di accoppiamento. Se quindi l'impulso di accensione ha durata inferiore a questo ritardo, le perturbazioni non possono disturbare il funzionamento del discriminatore.

Tali perturbazioni potranno però interferire con l'impulso successivo a quello che le ha generate; la durata di un tale stato di perturbazione sulla linea è però non superiore al doppio del tempo totale di transito della linea.

Con tale sistema si possono realizzare discriminatori con tempo morto non superiore a $0.5 \mu\text{s}$. Sono in fase di studio discriminatori molto più veloci, ancora basati sull'impiego di E 80 T.

* * *

Ringraziamo i dottori A. EGIDI, P. H. STOKER e M. TOLLER per la loro collaborazione.

SUMMARY

A new type of pulse-height analyzer using a beam deflection tube is described. The use of these tubes allows such a circuit to work at high repetition rate, without structural complexities.

Ricerca sulla esistenza di particelle di massa intorno a $550 m_e$ nella radiazione cosmica (*).

M. CONVERSI, G. M. DE MUNARI, A. EGIDI, E. FIORINI, S. RATTI,
C. RUBBIA, C. SUCCI e G. TORELLI

*Istituti di Fisica delle Università di Milano e di Pisa
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezioni di Milano e di Pisa*

(ricevuto il 29 Dicembre 1958)

Riassunto. — Sono riportati i risultati di una esperienza condotta allo scopo di controllare l'esistenza (ed eventualmente studiare le proprietà) delle particelle di massa pari a circa $550 m_e$ recentemente segnalate da A. I. ALIHANIAN *et al.* Il risultato negativo ottenuto è confrontato con quelli più recenti di vari altri gruppi. Si discute in particolare la possibilità che le particelle in questione siano simulate da interazioni nucleari di mesoni π o di protoni.

1. — Al Laboratorio Raggi Cosmici del Sabbione ⁽¹⁾, a 2550 m s. m., si sta concludendo una ricerca delle particelle di massa intorno a $550 m_e$ ^(**) segnalate da A. I. ALIHANIAN *et al.* ^(2,3).

(*) Presentato al XLIV Congresso della Società Italiana di Fisica, Palermo 6-11 Novembre 1958.

(**) Indicata nel seguito con la dicitura «particelle 550».

⁽¹⁾ E. FIORINI, C. GIORI, C. SUCCI e C. MORIGGIA: *Suppl. Nuovo Cimento*, **7**, 129 (1958).

⁽²⁾ A. I. ALIHANIAN *et al.* — *Intern. Conference on High Energy Physics* (Mosca, Maggio 1956).

⁽³⁾ A. I. ALIHANIAN, N. V. SHOSTAKOVICH, A. T. DADAIAN, N. V. FEDOROV e B. N. DERIAGIN: *Žu. Èksp. Teor. Fiz.*, **31**, 955 (1956); *Soviet Phys. J.E.T.P.*, **4**, 817 (1957) e bibliografia ivi contenuta.

In una precedente comunicazione ⁽⁴⁾ sono stati descritti i due dispositivi sperimentali con cui furono eseguite due successive serie di misure (Fig. 1).

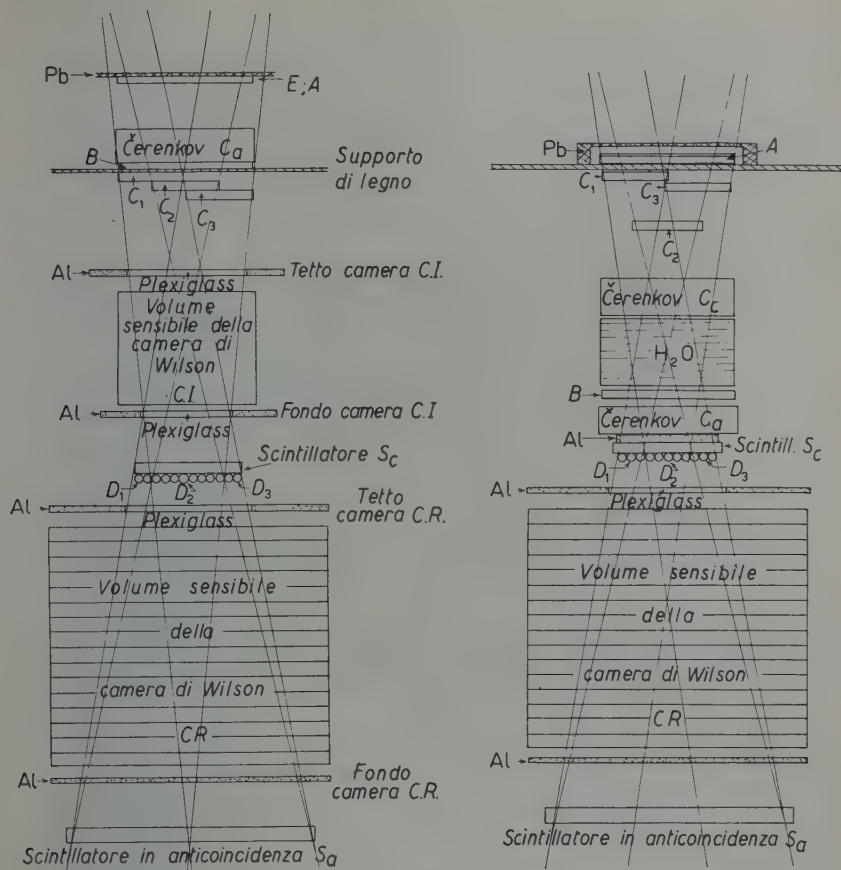


Fig. 1.

Nella prima serie di misure sono stati raccolti ~ 2100 fotogrammi in ~ 800 ore di effettiva misura; nella seconda serie ~ 3200 in ~ 900 ore di misura.

⁽⁴⁾ M. CONVERSI, G. M. DE MUNARI, A. EGIDI, E. FIORINI, S. RATTI, C. RUBBIA, C. SUCCI e G. TORELLI: *Il dispositivo sperimentale per la ricerca di particelle di $550 m_0$* . Comunicazione al XLIV Congresso della Società Italiana di Fisica, Palermo, Novembre 1958.

Nelle nostre misure la massa delle particelle che si arrestano nella camera a lastre C R (Fig. 1) viene ricavata nella maggior parte dei casi dall'ampiezza dell'impulso fornito dallo scintillatore proporzionale S_c e della misura del percorso residuo. Quando l'impulso dello scintillatore S_c non è utilizzabile (*) o quando comunque il risultato della misura sopra citata presenta qualche dubbio, dall'esame dei fotogrammi è sempre stato possibile identificare la particella, valutandone la massa mediante uno o più dei seguenti metodi:

- a) stima della ionizzazione in un punto della traccia e misura del percorso residuo;
- b) valutazione della variazione di ionizzazione lungo la traccia nella camera C R;
- c) misura degli angoli di « scattering » nelle lastre e del percorso residuo⁽⁵⁾.

Sono stati esclusi dall'analisi tutti i fotogrammi in cui la particella in esame termina il proprio percorso in una delle prime tre lastre della camera C R perchè, in questi casi, non si hanno sufficienti indicazioni per una sicura individuazione.

L'applicazione di questi criteri si rende necessaria in particolare per riconoscere quei protoni che, dopo aver attraversato lo scintillatore proporzionale S_c , subiscono una interazione nucleare prima di essere frenati in una delle lastre di C R. Poichè nella nostra esperienza la massa di una particella viene determinata con misure di perdita di energia e di percorso residuo, occorre porre particolare attenzione ad eventuali interazioni nucleari dei protoni nelle lastre e nel tetto della camera C R; per effetto di tali interazioni un protone si presenta con un percorso residuo inferiore a quello che gli competerebbe se si fermasse perdendo energia esclusivamente per ionizzazione e può così apparire con una massa inferiore a quella vera. Le interazioni nucleari in questione sono essenzialmente:

- a) interazioni tra lo scintillatore S_c e la camera C R con un solo secondario visibile in C R;
- b) interazioni in una lastra di C R senza emissione di secondari visibili;
- c) interazioni in una lastra di C R con emissione di un solo secondario visibile.

In Fig. 2 è mostrata una interazione del tipo c).

Nella prima serie di misure il riconoscimento delle interazioni di tipo a) è facilitato dall'esame della traccia nella camera di Wilson superiore (Fig. 1). Nella seconda serie di misure l'impulso del contatore di Čerenkov C_c unitamente

(*) Per il 30 % circa del tempo utile di misura, lo scintillatore S_c ha funzionato in modo non pienamente soddisfacente. I dati raccolti in queste condizioni sono stati analizzati a parte e inclusi successivamente nei risultati finali perchè trovati consistenti con gli altri.

(5) M. ANNIS, H. S. BRIDGE e S. OLBERT: *Phys. Rev.*, **89**, 1216 (1953).



Fig. 2.

all'analisi della traccia in CR permette il riconoscimento di tutti i protoni che subiscono i tre tipi di interazione elencati.

2. - I risultati ottenuti sono riportati nella Tab. I. Nelle prime due righe della Tabella sono riportati i numeri di protoni e di mesoni leggeri (μ e π) che si fermano per sole perdite di energia per ionizzazione in una delle lastre CR.

TABELLA I.

Eventi	Percorso residuo in acqua	
	da 59.1 a 64.3 g/cm ² 1 ^a serie di misure	da 91.5 a 96.7 g/cm ² 2 ^a serie di misure
Protoni a fine percorso	197	251
Mesoni μ e π a fine percorso	5	5
Protoni simulanti particelle 550 . .	9	16
« μ equivalenti »	~ 1400	~ 3600
Particelle 550 calcolate in base ai dati di A. I. ALIHANIAN <i>et al.</i> . .	~ 7	~ 18
Particelle 550 osservate	0	0

Nella terza riga della Tabella è riportato il numero di protoni che interagendo senza emissione di secondari visibili o con emissione di un solo secondario visibile, verrebbero scambiati per particelle 550 se la misura della massa fosse ricavata soltanto dai valori della perdita di energia nello scintillatore S_c e del percorso residuo in CR.

Nella quarta riga della Tabella è infine indicato, con l'abbreviazione « μ equivalenti », il numero calcolato dei mesoni μ che, entrando nell'angolo solido dell'apparato, sono arrestati in una delle lastre della camera CR durante la misura.

Per il rendimento assai elevato del contatore C_a di anticoincidenza, solo una frazione assai piccola di tali mesoni è stata effettivamente registrata (seconda riga della Tab. I).

Il numero di « μ equivalenti » è stato ricavato indipendentemente in due modi diversi:

a) estrapolando gli spettri di frequenza dei mesoni μ alle varie quote (⁶⁻¹⁰).

(⁶) *Progress in Cosmic Ray Physics*, vol. I (Amsterdam, 1952), p. 340.

(⁷) C. E. MILLER, J. E. HENDERSON, D. S. POTTER, J. TODD jr., W. M. SANDSTRÖM, G. R. GARRISON, W. R. DAVIS and F. M. CHARBONNER: *Phys. Rev.*, **93**, 590 (1954).

(⁸) M. N. KOČARIAN: *Soviet Phys. J.E.T.P.*, **1**, 128 (1956); **3**, 350 (1957).

(⁹) B. ROSSI: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948); B. ROSSI, M. SAND e R. SARD: *Phys. Rev.*, **72**, 120 (1948).

(¹⁰) M. CONVERSI: *Phys. Rev.*, **79**, 749 (1950).

b) moltiplicando l'intensità dei protoni ottenuta sperimentalmente per il rapporto tra il numero dei mesoni μ e dei protoni fine percorso, ricavato dai dati di C. E. MILLER *et al.* (⁷).

Se le particelle 550 avessero la frequenza riportata da A. I. ALIHANIAN *et al.*, di una su duecento mesoni μ , avremmo dovuto osservarne complessivamente circa 25: nessuna delle particelle rivelate con la nostra apparecchiatura è stata riconosciuta come tale.

3. - Il problema dell'esistenza delle particelle 550 è stato affrontato da numerosi altri autori con esperienze eseguite sia alle macchine sia coi raggi cosmici.

Le esperienze alle macchine sono state eseguite per cercare le particelle 550 intese come prodotti di decadimento o di interazione. In particolare:

a) G. HARRIS *et al.* (¹¹) hanno osservato in emulsione nucleare il decadimento di 5000 mesoni K^+ prodotti al Cosmotrone: nessuno dei prodotti di decadimento aveva massa prossima a 550 m_0 .

b) L. W. ALVAREZ *et al.* (¹²) hanno studiato con una camera a bolle a idrogeno in campo magnetico, la possibilità che particelle 550, con una quantità di moto di 450 MeV/c e una vita media maggiore di $1.6 \cdot 10^{-8}$ s, fossero prodotte dal bevatrone. La sezione d'urto per produzione di tali particelle è risultata inferiore di almeno 300 volte a quella di produzione dei mesoni K^- generati con la stessa quantità di moto.

c) P. C. STEIN (¹³) ha studiato l'eventuale produzione di particelle 550 in Berillio da parte dei raggi γ di bremsstrahlung dell'elettronsincrotrone di Cornell (energia da 550 MeV a 1.1 GeV). Nell'ipotesi che particelle di massa circa 550 m_0 siano prodotte in coppie con una vita media di 150 μ s, la sezione d'urto è risultata inferiore a $4 \cdot 10^{-33}$ cm²/nucleone.

Le ricerche compiute nella radiazione cosmica sono elencate nella Tab. II. Per brevità la discussione verrà svolta solo sulle esperienze di J. W. KEUFFEL *et al.*, A. I. ALIHANIAN *et al.* e N. BASU e M. S. SINHA nelle quali si hanno indicazioni più o meno favorevoli all'esistenza di particelle 550.

(¹¹) G. HARRIS, J. OREAR and S. TAYLOR: *Nuovo Cimento*, **6**, 1232 (1957).

(¹²) L. W. ALVAREZ, H. BRADNER, P. FALK-VAIRANT, G. D. GOW, A. H. ROSENFELD, F. T. SOLMITZ e R. D. TRIPP: *Proc. Seventh Annual Rochester Conference*, VIII, 16 (April 1957).

(¹³) P. C. STEIN: *Phys. Rev. Letters*, **1**, 21 (1958).

1) Nell'esperienza di J. W. KEUFFEL *et al.* ⁽¹⁴⁾ le particelle in esame dopo aver attraversato uno scintillatore proporzionale S_1 , sono assorbite in un grande scintillatore S_2 completamente circondato da un altro scintillatore in anticoincidenza S_3 ; un contatore di Čerenkov, pure in anticoincidenza, provvede ad escludere buona parte degli eventi corrispondenti a mesoni leggeri frenati in S_2 . Lo spettro delle masse ricavate dalle ampiezze degli impulsi degli scintillatori S_1 ed S_2 , presenta un picco intorno alle 550 m_e . Gli Autori, non essendo in possesso di una tecnica di osservazione visiva dei singoli eventi, non sono però in grado di stabilire se le particelle da essi rivelate come particelle 550 siano o meno simulate da protoni che subiscano interazioni nucleari in S_2 . Si conclude comunque che le particelle 550, se esistessero, avrebbero una frequenza almeno 500 volte inferiore a quella dei mesoni μ nello stesso intervallo di percorso residuo.

2) Nell'esperienza di A. I. ALIHANIAN *et al.*, già descritta nella precedente comunicazione ⁽⁴⁾, la misura della massa delle particelle osservate veniva ottenuta da misure di curvatura e di percorso residuo. A tale proposito era già stata messa in luce la possibilità ⁽¹⁵⁾ che tali eventi potessero essere attribuiti a mesoni π che, interagendo nelle lastre della camera di Wilson, dessero un percorso residuo apparente inferiore al proprio. Per minimizzare tale possibilità gli autori hanno compiuto misure di scattering e di variazione di ionizzazione sulle tracce delle particelle nella camera di Wilson. Ci sembra però che, dato l'elevato spessore delle lastre ed il basso numero di « gaps » disponibili, le condizioni sperimentali fossero troppo sfavorevoli per compiere misure sufficientemente attendibili.

3) N. BASU e M. S. SINHA ⁽¹⁶⁾ in una esperienza sulla intensità dei mesoni μ al livello del mare, eseguita con una camera di Wilson contenente 5 lastre di rame da mezzo pollice di spessore, hanno recentemente osservato 5 particelle cui attribuiscono una massa di circa 500 masse elettroniche in base a misure di ionizzazione, variazione di ionizzazione e percorso residuo. A nostro parere le informazioni che si possono trarre dall'esame della traccia di una particella che attraversa quattro lastre di così elevato spessore non possono permettere

⁽¹⁴⁾ R. L. CALL and J. W. KEUFFEL: *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **6**, 321 (1957); J. W. KEUFFEL, R. L. CALL, W. H. SANDMANN e M. O. LARSON: *Phys. Rev. Letters*, **1**, 203 (1958); J. W. KEUFFEL, R. L. CALL e W. H. SANDMANN: *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **3**, 162 (1958).

⁽¹⁵⁾ J. DAUDIN: *Journ. Phys. et Rad.*, **14**, 419 (1953); *Compt. Rend. du Congr. de Bagnères de Bigorre*, p. 244 (1953).

⁽¹⁶⁾ N. BASU e M. S. SINHA: *Ind. Journ. Phys.*, **36**, 259 (1958) e bibliografia ivi contenuta.

Autori	Quota (in m s.m.)	Tecnica
A. I. ALIHANIAN <i>et al.</i> ^(2,3) (Mosca)	3 200	Spettrometro magnetico e camera a lastre
J. OREAR <i>et al.</i> ⁽¹⁷⁾ (Columbia)	3 300	Emulsioni nucleari
N. DURGA PRASAD e O. P. SHARMA (Bombay) ⁽¹⁸⁾	3 400	Emulsioni nucleari
FAZIO (M.I.T.) ⁽¹⁹⁾	0	Emulsioni nucleari
J. W. KEUFFEL <i>et al.</i> ⁽¹⁴⁾ (Utah)	1 400	Elettronica
N. BASU, M. S. SINHA ⁽¹⁶⁾ (Calcutta)	0	Camera a lastre
A. HENDEL <i>et al.</i> ⁽²⁰⁾ (Princeton)	3 250	Camera con campo magnetico e camera a lastre
M. INOKI <i>et al.</i> ⁽²¹⁾ (Yamanashi Univ.)	0	Camera con campo magnetico con una lastra
Presente lavoro ⁽²²⁾ (Milano-Pisa)	2 550	Camera a lastre ed elettronica

una valutazione attendibile della massa. Inoltre ci sembra molto difficile che gli AA. abbiano potuto, in queste condizioni, riconoscere tutti i protoni simultanti per interazione nucleare una massa inferiore alla propria. D'altra parte va osservato che la curva di distribuzione delle misure di massa ottenute da determinazioni di ionizzazione e di percorso residuo presenta una lunga coda verso le masse maggiori dovuta alle fluttuazioni alla Landau della ionizzazione; di conseguenza le particelle 550 osservate potrebbero essere dovute anche a fluttuazione della misura della massa di mesoni μ o π .

⁽¹⁷⁾ J. OREAR, E. BIERMAN e S. ROSENDORFF: *Postdeadline to the 1958 New York Meeting of the Amer. Phys. Soc.* (Jan. 1958).

⁽¹⁸⁾ N. DURGA PRASAD e O. P. SHARMA: *Second U.N. Intern. Conference on Peaceful Uses of A.E.* (Geneva, Sept. 1958).

⁽¹⁹⁾ J. STEINBERGER *et al.*: *CERN Symposium*, 1958, p. 153 (1958).

⁽²⁰⁾ A. HENDEL, P. PIROUÉ e G. T. REYNOLDS: *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **3**, 25 (1958).

⁽²¹⁾ M. INOKI, T. YASAKI, M. MACHIDA and Y. MATSUKAWA: *Phys. Rev.*, **105**, 1872 (1957).

⁽²²⁾ M. CONVERSI, E. FIORINI, C. GIORI, C. RUBBIA, C. SUCCI e G. TORELLI: *Proc. Intern. Conference on Mesons and Recently Discovered Particles*, XIII-47 (Padua-Venice, Settembre 1957); M. CONVERSI, E. FIORINI, S. RATTI, C. RUBBIA, C. SUCCI e G. TORELLI: *Nuovo Cimento*, **9**, 140 (1958).

Metodo di misura	μ equiv.	Particelle 550 previste	Particelle 550 osservate
Curvatura e percorso residuo	2 200	—	11
Standard	700	3-4	0
Standard	500	2-3	0
Standard	1 250	6	0
Perdita di energia parziale e totale	28 000	140	< 50
Variazione di ionizz. e percorso residuo	?	?	5
Curvatura e percorso residuo	1 000	5	0
Curvatura e variazione di ionizzazione	80	1	< 3
Perdita di energia e perc. residuo	5 000	25	0

In conclusione noi riteniamo che in gran parte, se non tutti, gli eventi interpretati da A. I. ALIHANIAN *et al.* e da N. BASU e M. S. SINHA come particelle 550 siano pioni o protoni che, prima di terminare il loro percorso, abbiano subito delle interazioni nucleari non identificabili con le tecniche impiegate.

D'altra parte i risultati della presente esperienza, in cui il numero di informazioni disponibili è sufficiente a riconoscere senza ambiguità tutte le interazioni nucleari dei protoni incidenti, portano a concludere che, se le particelle 550 esistono, la loro frequenza è inferiore di almeno un fattore 10 a quella riportata da A. I. ALIHANIAN *et al.*

SUMMARY

The results are reported of a cosmic ray experiment carried out at an altitude of 2550 m a.s.l. to search for the 550-mass particles reported by ALIHANIAN *et al.* No event has been found out of 25 expected on the basis of the rate given by these authors. This negative result is compared with the results of other workers. The possibility for pions and protons to appear as 550-mass particles when undergoing unidentified nuclear interactions is discussed.

Su un contatore di Čerenkov a gas ad alto rendimento (*).

M. BENEVENTANO (**), E. DE AGOSTINO (**), C. A. GALTIERI (**),
B. RISPOLI (**) (**) e A. SERRA (**)

(**) *Istituto di Fisica dell'Università - Roma*

(**) *Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma*

(**) *Centro Coordinamento Elettronica del C.N.R.N. - Roma*

(ricevuto il 12 Gennaio 1959)

Riassunto. — Si presentano i dati preliminari riguardanti il funzionamento di un contatore di Čerenkov a gas. Le misure del rendimento del contatore, mediate sullo spettro dei mesoni μ dei raggi cosmici con quantità di moto maggiore di 1.75 GeV/c, in funzione della pressione del gas, hanno dato il valore di $(96.7 \pm 1.1)\%$ alla pressione di 10.23 atm N.P.T.

1. — Introduzione.

Uno dei problemi che si incontrano nelle esperienze eseguite all'elettrosincrotrone è la discriminazione fra pioni di momento di circa 1000 MeV/c, e quindi $\beta = 0.990$, ed elettroni di pari momento e $\beta \approx 1$.

Allo scopo si è studiata la possibilità di realizzare un Čerenkov a gas con efficienza molto prossima all'unità (in modo da poter essere usato eventualmente in anticoincidenza con altri rivelatori), pur mantenendo le dimensioni entro limiti ragionevoli (lunghezza circa 1 metro), e la pressione del gas (CO_2) non molto elevata (≤ 11 atm), onde poter fare le pareti del contenitore sufficientemente sottili.

Perchè un contatore di Čerenkov a gas abbia le caratteristiche prima elencate, come è stato messo in evidenza da vari autori ^(1,2), è necessario disporre

(*) Presentato al XLIV Congresso della Società Italiana di Fisica, Palermo, 6-11 Novembre 1958.

(1) A. ASCOLI BALZANELLI e R. ASCOLI: *Nuovo Cimento*, **6**, 1392 (1957).

(2) R. J. HANSON e D. C. MOORE: *Nuovo Cimento*, **4**, 1558 (1956).

di una catena elettronica capace di rivelare anche gli impulsi dovuti ad un singolo fotoelettrone emesso dal catodo del fotomoltiplicatore che rivela la luce della radiazione Čerenkov.

2. - Descrizione del dispositivo sperimentale.

Il disegno schematico del contatore di Čerenkov con le sue dimensioni principali è riportato in Fig. 1.

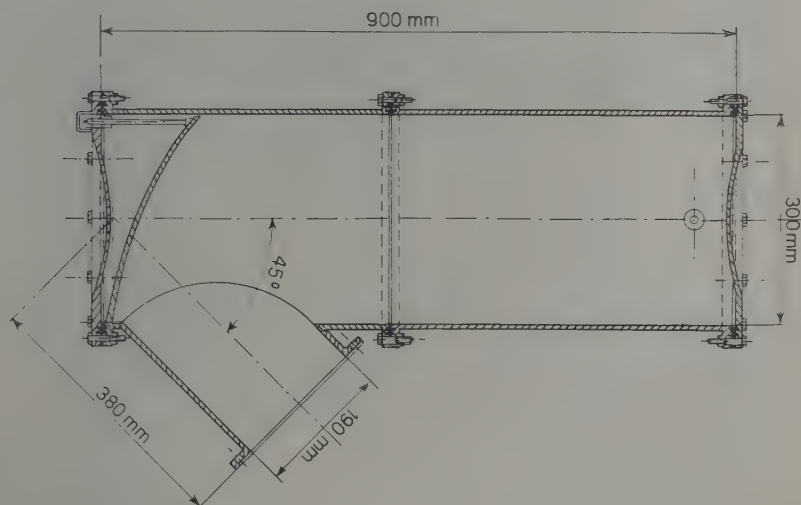


Fig. 1.

Uno specchio sferico alluminato concentra la luce della radiazione Čerenkov sul catodo del fotomoltiplicatore montato sulla finestra *A*. La concentrazione della luce è favorita da una guida di plexiglas di 5 cm di spessore particolarmente studiata.

Questa disposizione geometrica si è resa necessaria per evitare gli inconvenienti che si avrebbero se le particelle da rivelare attraversassero il catodo del fotomoltiplicatore.

Per la misura dell'efficienza del contatore di Čerenkov, mediante i mesoni μ dei raggi cosmici, si è usato il dispositivo di Fig. 2.

I contatori *A* e *B* sono due scintillatori plastici di forma circolare, di 17 cm di diametro ed 1 cm di spessore.

La luce di scintillazione viene rivelata mediante due fotomoltiplicatori ad alto guadagno del tipo RCA 6810A. Gli impulsi da essi forniti hanno un'ampiezza sufficiente a comandare i circuiti di coincidenza che seguono.

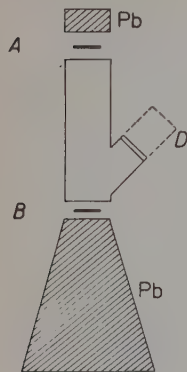


Fig. 2.

Il contatore *C* è uno scintillatore a toluolo di area $46 \times 46 \text{ cm}^2$ realizzato nei nostri laboratori. Quattro fotomoltiplicatori del tipo RCA 6342 rivelano la luce di scintillazione.

I segnali forniti da tali fotomoltiplicatori vengono mescolati e poi amplificati mediante un amplificatore rapido del tipo AR 62 realizzato dal Centro Coordinamento Elettronica del C.N.R.N. *D* è un fotomoltiplicatore Dumont 6364 a grande area fotosensibile (5 in. di diametro) che rivela la luce della radiazione Čerenkov. I segnali da esso forniti vengono amplificati mediante due amplificatori rapidi del tipo AR 62 prima menzionati.

L'assorbitore in piombo Pb, posto tra *B* e *C*, e l'assorbitore Pb' impongono un limite inferiore all'impulso (1.75 GeV/c) delle particelle rivelate dalla coincidenza tripla *ABC*.

L'assorbitore Pb' è stato studiato in modo tale da tagliare la componente molle dei raggi cosmici onde evitare un inutile affollamento nel contatore *A*.

Per la misura dell'efficienza del contatore da noi studiato, la quale si riduce al conteggio delle coincidenze triple *ABC* e quaduple *ABCD*, ci siamo serviti della catena elettronica schematizzata a blocchi in Fig. 3.

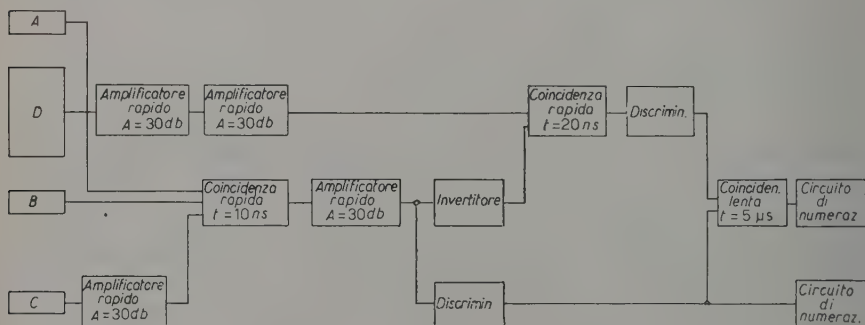


Fig. 3.

La coincidenza *ABC* viene effettuata mediante un circuito di coincidenza tripla rapida ⁽³⁾ il cui tempo di risoluzione, in queste particolari condizioni di lavoro, è di 10 ns.

⁽³⁾ U. PELLEGRINI, B. RISPOLI e A. SERRA: *Nuovo Cimento*, **9**, 171 (1958).

La coincidenza quadrupla $ABCD$ è stata realizzata mediante un circuito di doppia con tempo di risoluzione di 20 ns. Un canale viene comandato dagli impulsi che provengono dal fotomoltiplicatore D e l'altro dai segnali forniti dal circuito di tripla ABC .

Il circuito di coincidenza doppia lenta si è introdotto per evitare di contare degli impulsi di quadrupla senza che scattasse il numeratore di tripla come spesso accadeva (un simile inconveniente è stato riscontrato anche da HANSON ⁽²⁾ in un dispositivo sperimentale simile al nostro).

Da quanto si è detto precedentemente si vede chiaramente che la parte più critica del nostro dispositivo sperimentale è la coincidenza doppia rapida che deve poter essere comandata anche dai segnali generati da un singolo elettrone emesso dal fotocatodo del fotomoltiplicatore D . (Un certo numero di impulsi da rivelare ha ampiezza comparabile con quella degli impulsi di fondo ed anche minore, poichè questi ultimi hanno una distribuzione ⁽⁴⁾ continua in ampiezza che va da 0 a ≈ 8 fotoelettroni.)

Per un corretto funzionamento bisogna quindi:

a) amplificare sufficientemente gli impulsi provenienti dal fotomoltiplicatore D ;

b) ridurre entro limiti ragionevoli il numero delle casuali.

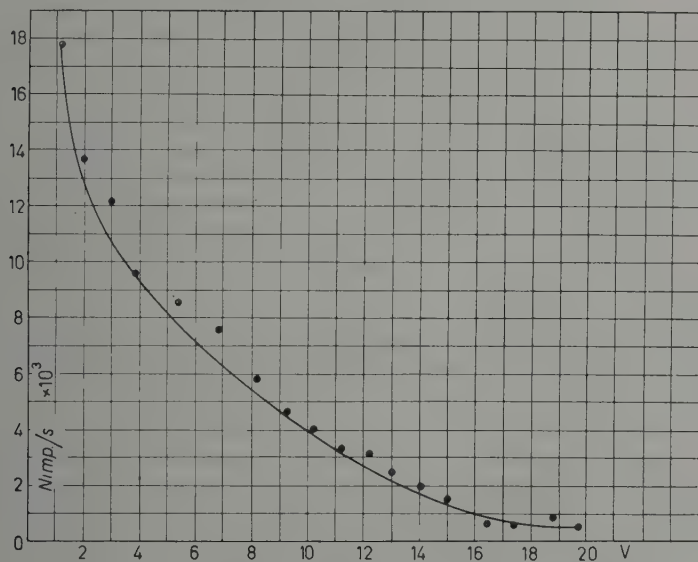


Fig. 4.

⁽⁴⁾ G. A. MORTON e J. A. MICHELI: *Nucleonics*, 4, 1, 16 (1949).

Per lavorare in condizioni da soddisfare la condizione *a*) ed essere quindi, con buona approssimazione, in condizioni da rivelare anche un singolo fotoelettrone si è fatto uno studio preliminare del fotomoltiplicatore 6364. Lo spettro integrale degli impulsi di fondo (Fig. 4) ci ha permesso di conoscere oltre che la loro distribuzione in ampiezza anche il loro numero nelle varie condizioni di amplificazione. I risultati sperimentali son però poco precisi.

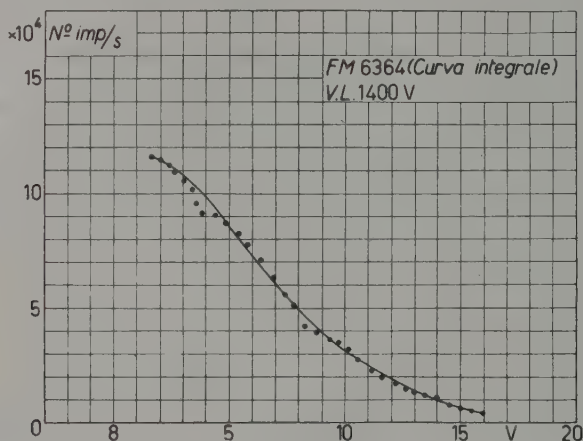


Fig. 5.

Ripetendo infatti più volte la stessa misura, ad intervalli di tempo, la curva integrale si spostava parallelamente a se stessa pur mantenendo lo stesso andamento. Spesso inoltre si osserva, durante la stessa misura, un improvviso aumento del numero degli impulsi, non giustificabile con considerazioni statistiche. Questo effetto è stato anche osservato su un fotomoltiplicatore del tipo RCA 6342.

Attualmente non abbiamo dati sufficienti per formulare una ipotesi attendibile che spieghi i fenomeni prima messi in evidenza ma ci proponiamo di fare in seguito uno studio più accurato.

Conosciuta la distribuzione integrale delle ampiezze degli impulsi, si è illuminato il fotocatodo con una debole sorgente di luce e si è ricavata la distribuzione spettrale degli impulsi nelle nuove condizioni di lavoro (Fig. 5).

Si è potuto quindi facilmente ricavare lo spettro differenziale degli impulsi generati dalla sorgente di luce.

La curva, (Fig. 6), presenta un massimo per un particolare valore V del taglio al discriminatore corrispondente alla ampiezza degli impulsi generati da un fotoelettrone.

Queste misure anche se non molto precise ci hanno permesso, come i risultati sperimentali confermano, di conoscere l'ordine di grandezza dell'amplificazione che bisognava applicare agli impulsi provenienti dal Čerenkov.

Dallo spettro integrale degli impulsi di fondo si vede che il loro numero è molto elevato ($10^4 \div 10^5$) il che potrebbe dare luogo ad un eccessivo numero di casuali.

Per evitarlo possono adottarsi vari accorgimenti:

1) ridurre al massimo il tempo di risoluzione del circuito di coincidenza; nel nostro caso non si può scendere al di sotto di 20 ns perchè, date le notevoli dimensioni del fotocatodo, i fotoelettroni che partono dai suoi vari punti non impiegano lo stesso tempo per raggiungere l'anodo: le variazioni nel tempo di transito sono dell'ordine di 15-20 ns;

2) ridurre al massimo il numero degli impulsi di fondo del fotomoltiplicatore.

A questo fine oltre le normali precauzioni che un buon montaggio richiede si può operare come segue:

a) raffreddare il fotocatodo (noi abbiamo evitato di farlo a causa delle complicazioni meccaniche che ciò richiede);

b) evitare effetti di integrazione dei piccoli impulsi dovuti ai dinodi del fotomoltiplicatore (a questo scopo noi ci siamo serviti di amplificatori rapidi con tempo di salita 3.5 ns. Quest'ultimo accorgimento, a quanto riferito in ⁽¹⁾, è di gran lunga il più efficace).

3. - Risultati sperimentali.

Nell'ipotesi che si sia in grado di rivelare impulsi dovuti alla radiazione Čerenkov che diano luogo anche ad un solo fotoelettrone, il rendimento del contatore Čerenkov è dato da:

$$(1) \quad F = 1 - A \exp[-N_e(e)],$$

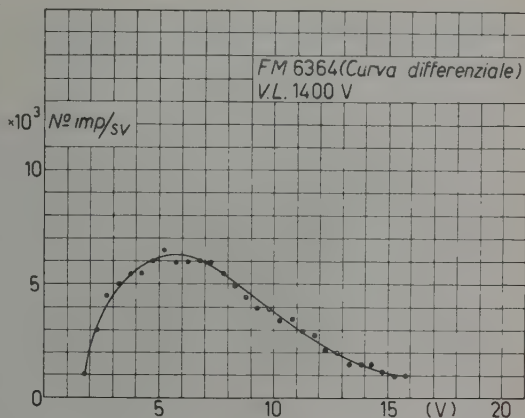


Fig. 6.

dove $N_e(c)$ è il numero medio di fotoelettroni emessi dal fotocatodo quando il contatore è attraversato da una particella con $\beta \approx 1$.

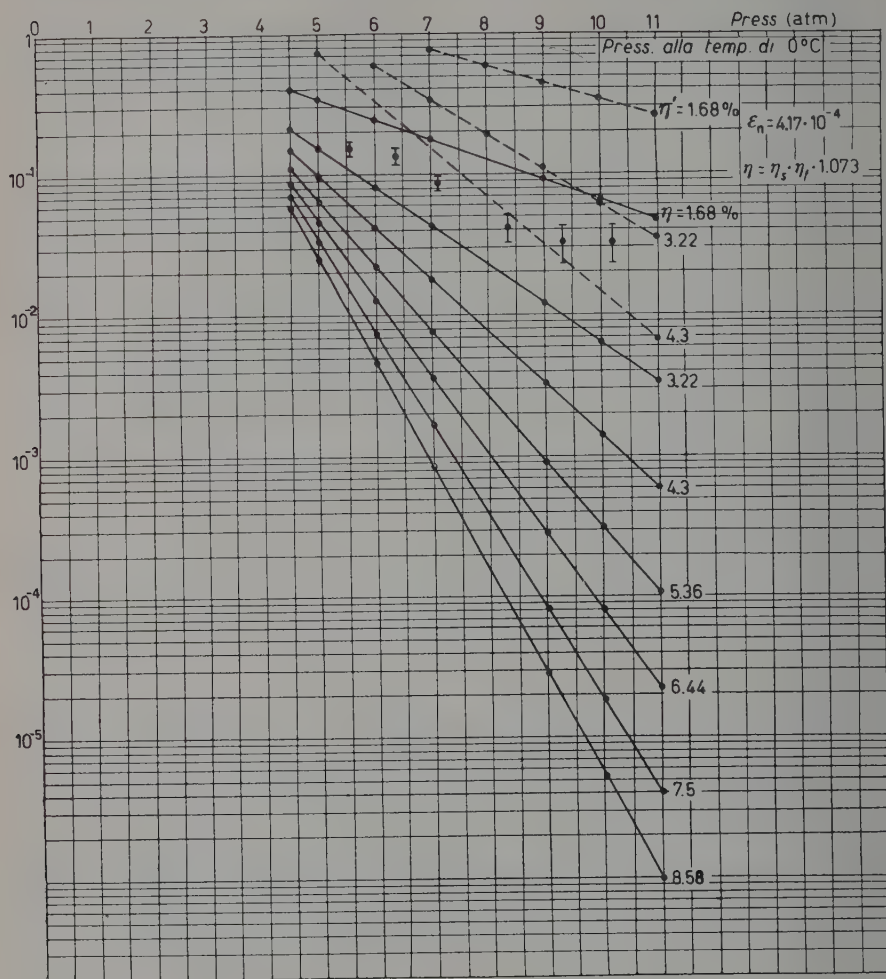


Fig. 7.

Come è noto (1) si ha:

$$N_e(c) = 2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\Delta \omega}{c} \eta_s \eta_f l \varepsilon_n,$$

ove:

η_s è l'efficienza del sistema ottico;

η_f è l'efficienza di conversione fotoelettrica del fotocatodo del fotomoltiplicatore;

$\varepsilon_n = n - 1$ con n = indice di rifrazione del gas;

l è la lunghezza del percorso delle particelle nel contatore.

Riportando in un grafico semilogaritmico $\log(1 - F)$ in funzione di ε_n si ottengono delle rette di parametro $\eta_f \eta_s$. Analogo risultato si ha nel caso che vengano rilevati due fotoelettroni emessi dal fotocatodo (Fig. 7).

Dal confronto con i dati sperimentali si può quindi verificare se la condizione che un singolo fotoelettrone venga rilevato è soddisfatta.

Nella Tab. I sono riportati i valori sperimentali F' delle efficienze alle varie pressioni e i valori F corretti per l'efficienza a contatore vuoto $\alpha = (5.79 \pm 0.44)\%$:

TABELLA I.

P_0 (atm)	5.95	6.38	7.12	8.36	9.35	10.23
F' (%)	85.7 ± 1.7	87.0 ± 1.5	91.9 ± 1.1	96.1 ± 1.0	96.9 ± 0.9	96.9 ± 1.0
F (%)	84.8 ± 1.8	86.1 ± 1.6	91.3 ± 1.2	95.8 ± 1.1	96.7 ± 1.0	96.7 ± 1.1

L'efficienza α , diversa da zero, si attribuisce a casuali ed essenzialmente a sciami estesi di raggi cosmici.

Il pianerottolo che si nota alle alte pressioni è dovuto ad un non perfetto funzionamento dell'elettronica. Questo inconveniente è in fase di eliminazione. La bassa pendenza dei punti sperimentali indica, posto $\eta_f = 0.10$, un'efficienza per il sistema ottico $\eta_s = \sim 20\%$, giustificabile con il fatto che, a causa di alcuni incidenti di lavorazione, l'alluminatura dello specchio non è riuscita del tutto soddisfacente.

Con la sostituzione dello specchio noi speriamo di migliorare notevolmente i risultati ottenuti.

SUMMARY

The performance of a CO_2 Čerenkov counter has been studied. The efficiency of the counter for μ -mesons of cosmic rays with momentum greater than $1.75 \text{ GeV}/c$ has been measured as a function of gas pressure. Preliminary results give for the efficiency the value $(96.7 \pm 1.1)\%$ at the pressure of 10.23 atm N.P.T.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Note on Parity Violation in Strong Interactions.

B. D'ESPAGNAT and J. PRENTKI

CERN - Geneva

(ricevuto il 16 Marzo 1959)

Recent experiments have led, as a very preliminary result, to the conjecture that parity might be violated in some of the strong interactions that involve strange particles ⁽¹⁾, while it is conserved to a high degree of accuracy in nuclear physics phenomena ⁽²⁾. It has been pointed out that these facts seem difficult to reconcile with isotopic spin conservation: indeed if Λ is really a singlet in isospace the reported longitudinal polarization of the produced Λ particles would be in contradiction with strict parity conservation in nuclear phenomena if the latter is a consequence of general symmetries alone. This was shown by STAPP ⁽³⁾.

Under these circumstances it seems worthwhile to investigate whether a strong parity violation in strange particle productions or interactions could be reconciled with some very weak and as yet unobserved parity violation in nuclear phenomena. Such a quantitative question is of course difficult to answer: one may for instance very well believe

that such a state of affairs results only from dynamical particularities (large energy denominators, velocity dependent parity mixtures, etc.). Calculations along these lines have not yet been done so that such a possibility still remains: Alternatively one may also believe that effects of this sort, although they probably are present, are not sufficient to account for the surprising difference of behaviour of the two kinds of phenomena. Some general principles should then be sought by means of which parity violation should be preserved in, say, Λ production and quenched in nuclear phenomena. The purpose of this note is to sketch very briefly a possible way of approach in this direction.

The general idea is first to split the strong interaction hamiltonian H_{int} into two parts of different strengths, as has often been proposed in other connections:

$$H_{\text{int}} = H_1 + H_2,$$

where the very strong part H_1 could for instance be the π interactions and where the weaker part, H_2 could be the K interactions ^(*). It is assumed

⁽¹⁾ H. BLUMENFELD, W. CHINOWSKY and L. M. LEDERMANN: *Nuovo Cimento*, **8**, 296 (1958).

⁽²⁾ See e.g. D. H. WILKINSON: *Phys. Rev.*, **109**, 1603, 1610, 1614 (1958).

⁽³⁾ H. STAPP: to be published.

^(*) In our example H_{int} contains only Yukawa type interactions.

that the coupling constants in H_2 are weak enough so that a perturbation expansion in H_2 (not in H_1) makes some sense. H_2 is then himself split into two parts

$$H_2 = gh + g'h',$$

where h and h' could for instance be the NK and EK interactions.

Let us next assume that H_1 , h and h' can be chosen in such a way that there exist two *distinct* assignments of parities to the set of existing particle fields: one which makes $H_1 + gh$ parity conserving but not h' , and one which makes $H_1 + g'h'$ parity conserving but not h . Under these circumstances it is easy to choose H_1 , h and h' in such a way that all matrix elements for nuclear reactions (*):

a) do not contain any odd power of H_2 .

b) are such that the terms of second order in H_2 do not involve the bilinear product hh' .

For instance, conditions a) and b) are automatically satisfied if H_1 , h and h' are the π , NK and EK interactions respectively. Then the parity violating terms in any nuclear matrix element are of order 4 or higher in H_2 ; this we may assume will quench the parity mixture parameter in nuclear phenomena.

Now we have still to choose our parity assignments in such a way that for Λ production no similar quenching should appear. For that purpose.

i) we require that H_1 , h and h' should all be invariant under the conventional charge symmetry operation (we do not require charge invariance). This condition is enough to make the self-mass matrix diagonal in Λ and Σ_0 and guarantees therefore that the physi-

cally detectable particles are the quanta of the Λ and Σ_0 fields and not of any linear combinations of Λ and Σ_0 (**);

ii) we choose, however, the assignments of parities to the various particle fields in such a way that the set of parity assignments which makes $H_1 + gh$ parity conserving involves in particular *opposite* parities for

$$Y = \frac{\Lambda - \Sigma_0}{\sqrt{2}},$$

and

$$Z = \frac{\Lambda + \Sigma_0}{\sqrt{2}}.$$

This in no way contradicts any of our previous assumptions. It is true that, were h' absent, condition ii) would imply that the self mass matrix is diagonal in Y and Z (this in turn would mean that Y and Z are the physically observable particles and together with i) would imply that Λ , Σ_0 , Y and Z have the same mass), but as long as g' is appreciable ($g' \gg e$) this is not the case. Thus nothing in condition ii) prevents Λ and Σ_0 from having different masses.

h being the hamiltonian part which creates $\Lambda + K$ from an initial system made of « ordinary » particles, the matrix element for Λ production, to lowest order in H_2 , involves h linearly (and H_1 to all powers). Because of the mixed parity character of the Λ this matrix element will in general give rise to an appreciable amount of parity mixture and, as is easily checked, to an appreciable longitudinal polarization of the Λ .

Detailed hamiltonians that obey conditions i) and ii) can easily be written but considering the preliminary character of the experimental material this, up

(*) The term nuclear reaction will mean in the following all processes where the particles in the initial and final state have all strangeness zero.

(**) As Λ and Σ_0 are transformed in Λ and $-\Sigma_0$ under charge symmetry, no transitions from Λ to Σ_0 or from Σ_0 to Λ states are possible through H_{int} .

to now, seems hardly worthwhile. A general and unpleasant feature of all these hamiltonians is that they do not conserve ordinary isospin: this is due to the fact that Σ_0 has a mixed parity while Σ^+ and Σ^- , being the only particles of their kind (specified Q , N and S), must necessarily be ascribed a definite parity

assignment. An approximate conservation of isospin (in H_1) can, however, always be introduced which might be sufficient for nuclear and pion physics phenomena. In such schemes the approximate equalities of the Σ^\pm , Σ^0 masses would thus probably raise the most serious problems.

Sull'integrazione delle equazioni della magnetoidrostatica per configurazioni a simmetria assiale.

E. CANOBBIO e R. CROCI

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Milano

(ricevuto il 20 Marzo 1959)

Si espone brevemente un metodo per ricondurre l'integrazione delle equazioni della magnetoidrostatica, per un cilindro e un toro circolari, a quella di un'equazione integrodifferenziale non lineare. Per alcune condizioni al contorno richieste dal problema si possono assumere i valori sperimentali; in questo modo si tiene conto, nello studio dell'equilibrio delle forti scariche nei gas, di fenomeni, come l'inversione della componente assiale del campo magnetico, notati in alcune zone dei tubi.

Le equazioni così ottenute si possono integrare numericamente, studiando anche la stabilità delle soluzioni rispetto a piccole variazioni delle condizioni al contorno; evidentemente questo è un aspetto, in pratica notevolmente interessante, del problema più generale della stabilità magnetoidrodinamica.

1. - In un sistema di unità di misura gaussiano razionalizzato, con $c=1$, le equazioni della magnetoidrostatica si scrivono:

$$(1) \quad \begin{cases} \text{grad } p = (\text{rot } \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}, \\ \text{div } \mathbf{B} = 0. \end{cases}$$

In un sistema di coordinate ortogonali (x^1, x^2, x^3) , i coefficienti della cui metrica sono indipendenti da x^3 , le soluzioni indipendenti da x^3 soddisfano il sistema di equazioni:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x^1} - a^{22} B_2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} \right) + a^{33} B_3 \frac{\partial B_3}{\partial x^1} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x^2} + a^{11} B_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} \right) + a^{33} B_3 \frac{\partial B_3}{\partial x^2} = 0, \\ a^{11} B_1 \frac{\partial B_3}{\partial x^1} + a^{22} B_2 \frac{\partial B_3}{\partial x^2} = 0, \\ a^{11} \frac{\partial B_1}{\partial x^1} + a^{22} \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + a^{11} B_1 \frac{\partial (\ln \sqrt{a})}{\partial x^1} + a^{22} B_2 \frac{\partial (\ln \sqrt{a})}{\partial x^2} + B_1 \frac{\partial a^{11}}{\partial x^1} + B_2 \frac{\partial a^{22}}{\partial x^2} = 0, \end{cases}$$

dove

$$\sqrt{a} = \sqrt{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}}.$$

Il sistema (2) è quasi-lineare di tipo composito; infatti le radici dell'equazione caratteristica sono:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{a^{22}B_2}{a^{11}B_1}, \quad \sigma_3 = i\sqrt{a^{11} \cdot a^{22}}, \quad \sigma_4 = -i\sqrt{a^{11} \cdot a^{22}}.$$

I sistemi di coordinate che consideriamo esplicitamente sono:

- a) le coordinate cilindriche;
 b) un sistema di coordinate $(\varrho, \theta, \varphi)$, legate a quelle cartesiane (x, y, z) dalle relazioni

$$\begin{cases} x = A \cos \varphi, \\ y = A \sin \varphi, \\ z = \varrho \sin \theta, \end{cases} \quad A = R - \varrho \cos \theta,$$

valido nella regione toroidale $0 \leq \varrho < r$, $0 < \theta \leq 2\pi$, $0 < \varphi < 2\pi$, $r < R$, dove R è il raggio maggiore del toro. I coefficienti della metrica sono: $a^{11} = 1$, $a^{22} = 1/\varrho^2$, $a^{33} = 1/A^2$.

In entrambi i sistemi considerati a^{11} è uguale ad 1. Moltiplicando allora la I (2) per B_1 , la II (2) per $a^{22}B_2$, sommando e tenendo conto della III (2), si ottiene la equazione

$$(3) \quad B_1 \frac{\partial p}{\partial x^1} + a^{22}B_2 \frac{\partial p}{\partial x^2} = 0,$$

che è formalmente identica alla III (2).

2. - Sia $x^2 = s(x', \tau')$ la famiglia di curve con parametro τ , definita dall'equazione differenziale

$$\frac{dx^2}{dx^1} = \frac{a^{22}B_2}{B_1}.$$

Le formule di passaggio dal sistema (x^1, x^2) al sistema di coordinate (x', τ') e viceversa, siano

$$\begin{cases} x^1 = x', \\ x^2 = s(x', \tau), \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x^1, \\ \tau = S(x^1, x^2). \end{cases}$$

Nel sistema di coordinate (x', τ) le equazioni (3) e III (2) si scrivono:

$$\frac{\partial}{\partial x'} (z'(x', \tau)) = 0,$$

cioè $p' = p'(\tau)$, $B'_3 = B'_3(\tau)$.

Nel seguito apparirà come sia possibile determinare $p'(\tau)$ e $B'_3(\tau)$ quando siano assegnate le condizioni al contorno.

3. - Per il seguito è utile introdurre il potenziale vettore A ; nell'ipotesi che non dipenda da x^3 , B_1 e B_2 sono dati da:

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial A_3}{\partial x^2}, \quad B_2 = -\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial A_3}{\partial x^1}.$$

Derivando la I(2) rispetto a x^2 , la II(1) rispetto a x^1 e sottraendo, si ottiene:

$$(4) \quad B_1 \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} \right) + a^{22} B_2 \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} \right) + \left(a^{22} \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_1}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} \right) - \\ - \frac{\partial a^{33}}{\partial x^2} B_3 \frac{\partial B_3}{\partial x^1} + \frac{\partial a^{33}}{\partial x^1} B_3 \frac{\partial B_3}{\partial x^2} = 0.$$

4. - Convieni, d'ora innanzi, considerare separatamente le coordinate cilindriche e quelle toroidali. Tenendo conto della IV (2), in coordinate cilindriche la (4) si scrive:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\partial B_1}{\partial \theta} - \frac{\partial B_2}{\partial \varrho} \right) + \frac{a^{22} B_2}{B_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial B_1}{\partial \theta} - \frac{\partial B_2}{\partial \varrho} \right) + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} (\ln \sqrt{a}) + \frac{a^{22} B_2}{B_1} \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln \sqrt{a}) \right) \left(\frac{\partial B_1}{\partial \theta} - \frac{\partial B_2}{\partial \varrho} \right) = 0.$$

Nel sistema di riferimento (x', τ) , ponendo $(\partial B_1 / \partial \theta - \partial B_2 / \partial \varrho) = z$:

$$\frac{\partial z'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x'} (\ln \sqrt{a'}) \cdot z' = 0,$$

cioè

$$(5) \quad z' = c(\tau) / \sqrt{a'}; \quad \text{oppure} \quad \sqrt{a'} A'_2 A'_3 = \frac{c(\tau)}{\sqrt{a'}},$$

dove A'_2 è l'operatore di Laplace in due dimensioni, nel riferimento (x', τ) .

Per determinare $c(\tau)$ è necessario assegnare $\tau = S(\varrho, \theta)$ per ϱ , o θ , costante. L'equazione

$$(6) \quad \frac{d\theta}{d\varrho} = \frac{a^{22} B_2}{B_1},$$

è un'identità quando a θ si sostituisca $s(x', \tau)$ e a ϱ , x' . L'equazione (5) dà A'_3 , e quindi B'_1 e B'_2 , in funzione di x' , τ , $s(x', \tau)$; sostituendone l'espressione in (6), si ottiene per $s(x', \tau)$ un'equazione cui imponiamo le condizioni al contorno:

$$(7) \quad 0 = s(x', \tau_0(x')), \quad 2\pi = s(x', \tau_1(x')),$$

dove $\tau_0(x')$ e $\tau_1(x')$ si possono dare ad arbitrio. Per esse, invertendo la (7) si ha:

$$\tau_0(\varrho) = S(\varrho, 0), \quad \tau_1(\varrho) = S(\varrho, 2\pi).$$

Quando si conosca $A_2 A_3$ per $\theta=0$, è quindi possibile assegnare $c(\tau)$; sia:

$$[A_2 A_3]_{\theta=0} = \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\partial B_1}{\partial \theta} - \frac{\partial B_2}{\partial \varrho} \right) \right]_{\theta=0} = \beta(\varrho).$$

Se $\tau_0(\varrho) \equiv \varrho$,

$$\frac{c(S(\varrho, 0))}{\varrho^2} = \frac{c(\varrho)}{\varrho^2} = \beta(\varrho),$$

da cui:

$$c(\tau) = \tau^2 \beta(\tau).$$

Se all'equazione

$$A'_2 A'_3 = \frac{c(\tau)}{(x')^2},$$

imponiamo una condizione corrispondente nel sistema $(x' \tau)$ alla:

$$[A_3]_{\varrho=r} = \alpha(\vartheta).$$

si ottiene formalmente:

$$\begin{aligned} A'_3(x', \tau) = & -\frac{1}{4\pi} \int_0^r \int_{\tau_0}^{\tau_1} K(x', \tau | \xi, \eta) \frac{\eta^2 \beta(\eta)}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} s(\xi, \eta) d\xi d\eta - \\ & - \frac{r}{4\pi} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\alpha(s(\xi, \eta)) \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} K(x', \tau | \xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} K(x', \tau | \xi, \eta) \left(\frac{\partial s / \partial \xi}{\partial s / \partial \eta} \right) \right\} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right]_{\xi=r} d\eta, \end{aligned}$$

dove K è la funzione di Green che soddisfa condizioni di Dirichlet omogenee per $x' = r$:

$$K(x', \tau | \xi, \eta) = -2 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) + 2 \ln \left(\frac{\xi}{r} \right),$$

con

$$r_1 = \frac{1}{r} \sqrt{(x')^2 + \xi^2 - 2x'\xi \cos(s(x', \tau) - s(\xi, \eta))},$$

$$r_2 = \frac{1}{\xi} \sqrt{(x')^2 + \xi^2 + r^2 - 2x'\xi \cos(s(x', \tau) - s(\xi, \eta))}.$$

L'equazione integrodifferenziale finale è la seguente:

$$(8) \quad \frac{\partial A'_3}{\partial \tau} \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{1}{(x')^2} \left(\frac{\partial A'_3}{\partial x'} \frac{\partial s}{\partial \tau} - a'^{22} \frac{\partial A'_3}{\partial \tau} \frac{\partial s}{\partial x'} \right),$$

$B'_3(\tau)$ si determina come $c(\tau)$: se $[B_3]_{\theta=0} = \gamma(\varrho)$, si ha:

$$B'_3(\tau) = \gamma(\tau).$$

La condizione che sulla superficie plasma-vuoto la variazione di $p + (\mathbf{B})^2/2$ sia nulla, può venire soddisfatta da una p opportuna, quali che siano B_1, B_2, B_3 , per $\varrho = r$; per assegnare $p(\tau)$ è però necessario aver integrato la (8), ottenendo $s(x', \tau)$ e, quindi, $S(\varrho, \theta)$. Inoltre si ha $[B_1]_0 = r = (d\alpha(\theta)/d\theta)$ e, con l'ipotesi che esternamente al plasma sia $B_1 = 0$, $\alpha(\theta) = \cos \theta = [A_3]_{\varrho=r}$, è possibile assegnare $\beta(\varrho)$ se si assume $[\partial B_1/\partial \theta]_{\varrho=0} = 0$. In tale caso si ha infatti:

$$\left[\frac{\partial B_2}{\partial \varrho} \right]_{\varrho=0} = \varrho \beta(\varrho).$$

5. - Nel caso delle coordinate toroidali conviene sostituire all'equazione:

$$\frac{d\theta}{d\varrho} = \frac{a^{22}B_2}{B_1},$$

il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = a^{22}B_2 \\ \frac{d\varrho}{dt} = B_1, \end{cases}$$

il cui integrale generale sia:

$$\begin{cases} \varrho = \mu(t, \tau, \sigma), \\ \theta = \nu(t, \tau, \sigma). \end{cases}$$

Riuscendo ad esprimere B_1 e B_2 come funzioni di $\mu(t, \tau, \sigma)$ e $\nu(t, \tau, \sigma)$ il sistema:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varrho}{\partial t} = B_1(\mu(t, \tau, \sigma), \nu(t, \tau, \sigma), t, \tau, \sigma), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = a^{22}B_2(\mu(t, \tau, \sigma), \nu(t, \tau, \sigma), t, \tau, \sigma), \end{cases}$$

con opportune condizioni al contorno definisce due funzioni $\varrho = \mu(t, \tau, \sigma)$, $\theta = \nu(t, \tau, \sigma)$; per questo assegniamo il valore di μ su una superficie cilindrica con generatrici parallele all'asse t e direttrice $\sigma = \sigma(\tau)$; nel sistema di coordinate (t, τ) , σ è un parametro, e quindi si può porre $\sigma = \sigma(\tau)$, così che il sistema (9) si riduce alla equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nu'(t, \tau) = a^{22'} B(\mu'(t, \tau), \nu'(t, \tau), t, \tau),$$

dove

$$\mu'(t, \tau) = \mu(t, \tau, \sigma(\tau)) \quad \text{e} \quad \nu'(t, \tau) = \nu(t, \tau, \sigma(\tau)).$$

Nel sistema di riferimento che così abbiamo determinato, l'equazione (4) si scrive:

$$\frac{\partial z'}{\partial t} + z' \frac{\partial}{\partial t} (\ln \sqrt{a'}) = \frac{1}{2J} \frac{\partial}{\partial \tau} (B_3')^2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} a'^{33},$$

dove

$$J = \frac{\partial \mu'}{\partial t} \frac{\partial v'}{\partial \tau} - \frac{\partial \mu'}{\partial \tau} \frac{\partial v'}{\partial t}.$$

Integrando si ha:

$$z' = \frac{1}{\sqrt{a'}} \left(\int \left(\frac{\sqrt{a'}}{2J} \frac{\partial}{\partial \tau} (E_3')^2 \cdot \frac{\partial a'^{(33)}}{\partial t} \right) dt' + c(\tau) \right).$$

Da qui innanzi il problema è analogo a quello del cilindro; eccetto per il fatto che l'equazione che si considera ricercando le soluzioni indipendenti dalla terza coordinata dell'equazione $\Delta_3 z = f(\varrho, \theta)$ in coordinate toroidali, non è più un'equazione di Poisson. Non si è riusciti a calcolarne la funzione di Green; pensiamo che l'integrazione numerica si possa egualmente effettuare considerando il sistema di due equazioni differenziali.

Per quanto riguarda il campo di integrazione, esso è dato dalle curve

$$\begin{cases} t_i = t_i(u), \\ \tau_i = \tau_i(u), \end{cases}$$

che devono soddisfare le condizioni

$$\begin{cases} t_i(u)_{u=u_g} = t_{i+1}(u)_{u=u_g}, \\ \tau_i(u)_{u=u_g} = \tau_{i+1}(u)_{u=u_g}, \end{cases}$$

($i = 1, 2, 3, 4$; per $i = 4$, $i + 1 = 1$; u è un parametro).

Esse si determinano con le relazioni

$$\begin{cases} 0 = \mu'(t, \tau), \\ r = \mu'(t, \tau), \end{cases}$$

e imponendo, come condizioni al contorno per la funzione $v'(t, \tau)$, che sia

$$\begin{cases} 0 = v'(t_3(u), \tau_3(u)), \\ 2\pi = v'(t_4(u), \tau_4(u)). \end{cases}$$

* * *

Ringraziamo il prof. P. CALDIROLA per il suo costante interessamento a questo lavoro.

Sull'integrazione delle equazioni linearizzate della magnetoidrostatica.

E. CANOBBIO e R. CROCI

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Milano

(ricevuto il 20 Marzo 1959)

In ⁽¹⁾ si è mostrato un metodo per ricondurre l'integrazione delle equazioni della magnetoidrostatica, nel caso di un cilindro e un toro circolari, a quella di un'equazione integrodifferenziale non lineare.

Vogliamo ora mostrare come il sistema che si ottiene linearizzando il precedente può essere ricondotto a un'equazione differenziale lineare.

Si pensa che l'integrazione di questa equazione, e quindi il confronto, che sarebbe assai interessante, con le soluzioni del sistema della magnetoidrostatica (1), sia possibile solo numericamente.

1. - Se \mathbf{B} e p_0 sono soluzioni del sistema ⁽¹⁾

$$(1) \quad \begin{cases} \text{grad } p = (\text{rot } \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}, \\ \text{div } \mathbf{B} = 0, \end{cases}$$

corrispondenti alle condizioni al contorno del problema, perchè $\mathbf{B} + \mathbf{b}$ e $p_0 + p$ soddisfino ancora le (1) (al primo ordine in \mathbf{b} e p), occorre che le perturbazioni \mathbf{b} e p soddisfino il sistema linearizzato

$$(2) \quad \begin{cases} \text{grad } p = (\text{rot } \mathbf{b}) \wedge \mathbf{B} + (\text{rot } \mathbf{B}) \wedge \mathbf{b}, \\ \text{div } \mathbf{b} = 0. \end{cases}$$

Sulla superficie fluido-vuoto devono sempre essere verificate le condizioni:

$$\begin{cases} \langle p + \mathbf{B} \cdot \mathbf{b} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \rangle = 0, \end{cases}$$

dove: \mathbf{n} è il versore normale alla superficie, e con $\langle x \rangle$ si indica la variazione della grandezza x attraverso tale superficie.

⁽¹⁾ E. CANOBBIO e R. CROCI: *Nuovo Cimento*, **12**, 167 (1959).

2. - Nelle coordinate cilindriche, e in quelle «toroidali» introdotte in (1), il sistema (2) si scrive:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x^1} - a^{22} B_2 \left(\frac{\partial b_1}{\partial x^2} - \frac{\partial b_2}{\partial x^1} \right) + a^{33} B_3 \frac{\partial b_3}{\partial x^1} = \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} \right) a^{22} b_2 - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} a^{33} b_3, \\ \frac{\partial p}{\partial x^2} + B_1 \left(\frac{\partial b_1}{\partial x^2} - \frac{\partial b_2}{\partial x^1} \right) + a^{33} B_3 \frac{\partial b_3}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} \right) b_1 - \frac{\partial B_3}{\partial x^2} a^{33} b_3, \\ B_1 \frac{\partial b_3}{\partial x^1} + a^{22} B_2 \frac{\partial b_3}{\partial x^2} = - \frac{\partial B_3}{\partial x^1} b_1 - \frac{\partial B_3}{\partial x^2} a^{22} b_2, \\ \frac{\partial b_1}{\partial x^1} + a^{22} \frac{\partial b_2}{\partial x^2} = - \frac{\partial}{\partial x^1} (\ln \sqrt{a}) \cdot b_1 - \frac{\partial}{\partial x^2} (\ln \sqrt{a}) \cdot a^{22} b_2. \end{cases}$$

Esso è di tipo composito, le radici dell'equazione caratteristica essendo

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{B_2 a^{22}}{B_1}, \quad \sigma_3 = i\sqrt{a^{22}}, \quad \sigma_4 = -i\sqrt{a^{22}}.$$

Ponendo

$$\begin{cases} p = c_1 z_1 - c_3 a^{33} B_3 z_3, \\ b_1 = c_4 z_4, \\ b_2 = c_5 z_2, \\ b_3 = c_3 z_3, \end{cases}$$

dove c_1, c_2, c_3, c_4 sono funzioni arbitrarie di x^1, x^2 , il sistema (3) diviene:

$$(3) \quad \begin{cases} c_1 \frac{\partial z_1}{\partial x^1} + \frac{\partial c_1}{\partial x^1} z_1 - c_3 \frac{\partial}{\partial x^1} (B_3 a^{33}) z_3 - B_2 a^{22} c_4 \frac{\partial z_4}{\partial x^2} - z_4 B_2 a^{22} \frac{\partial c_4}{\partial x^2} + B_2 a^{22} c_2 \frac{\partial z_2}{\partial x^1} + \\ + B_2 a^{22} \frac{\partial c_2}{\partial x^1} z_2 = a^{22} \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} \right) c_2 z_2 - a^{33} c_3 \frac{\partial B_3}{\partial x^1} z_3, \\ c_1 \frac{\partial z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial c_1}{\partial x^2} z_1 - c_3 \frac{\partial}{\partial x^2} (a^{33} B_3) z_3 - B_1 c_2 \frac{\partial z_2}{\partial x^1} - B_1 \frac{\partial c_2}{\partial x^1} z_2 + B_1 c_4 \frac{\partial z_4}{\partial x^2} + B_1 \frac{\partial c_4}{\partial x^2} z_4 = \\ = c_4 \left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} \right) z_4 - a^{33} c_3 \frac{\partial B_3}{\partial x^2} z_3, \\ B_1 c_3 \frac{\partial z_3}{\partial x^1} + B_1 \frac{\partial c_3}{\partial x^1} z_3 + B_2 a^{22} c_3 \frac{\partial z_3}{\partial x^2} + B_2 a^{22} \frac{\partial c_3}{\partial x^2} z_3 = - c_4 \frac{\partial B_3}{\partial x^1} z_4 - a^{22} c_2 z_2 \frac{\partial B_3}{\partial x^2}, \\ c_4 \frac{\partial z_4}{\partial x^1} + \frac{\partial c_4}{\partial x^1} z_4 + a^{22} c_2 \frac{\partial z_2}{\partial x^2} + a^{22} \frac{\partial c_2}{\partial x^2} z_2 = - c_4 \frac{\partial}{\partial x^1} (\ln \sqrt{a}) z_4 - a^{22} c_2 \frac{\partial}{\partial x^2} (\ln \sqrt{a}) z_2. \end{cases}$$

Moltiplicando la II (3) per $a^{22} B_2 / B_1$, sommando alla I (3) e ponendo

$$c_1 = 1, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x^1} B_2 - c_2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} \right) = 0, \quad c_3 = \frac{1}{B_3}, \quad \frac{\partial c_4}{\partial x^2} - \frac{\partial c_4}{\partial x^1} + \frac{1}{B_1} \left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2} \right) = 0,$$

si ha

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial x^1} + \frac{a^{22}B_2}{B_1} \frac{\partial z_1}{\partial x^2} = z_3 \left(\frac{\partial a^{33}}{\partial x^1} + \frac{a^{22}B_2}{B_1} \frac{\partial a^{33}}{\partial x^2} \right) + a^{22} \frac{\partial c_2}{\partial x^1} B_2 z_2, \\ \frac{1}{B_3} \left(\frac{\partial z_3}{\partial x^1} + \frac{a^{22}B_2}{B_1} \frac{\partial z_3}{\partial x^2} \right) = - \frac{c_4 z_4}{B_1} \frac{\partial B^3}{\partial x^1} - \frac{a^{22}c_2}{B_1} \frac{\partial B_3}{\partial x^2} z_2, \\ \frac{\partial}{\partial x^1} (c_4 \sqrt{a} z_4) + \frac{\partial}{\partial x^2} (a^{22} \sqrt{a} z_2) = 0, \\ \frac{\partial z_1}{\partial x^1} - a^{22} B_2 c_4 \frac{\partial z_4}{\partial x^2} + a^{22} B_2 c_2 \frac{\partial z_2}{\partial x^1} = \frac{\partial a^{33}}{\partial x^1} z_3 + a^{22} B_2 \frac{\partial c_4}{\partial x^2} z_4. \end{cases}$$

Se $s(x', \tau)$ è l'integrale generale di $dx^2/dx^1 = a^{22}B_2/B_1$, dal riferimento (x^1, x^2) si passi a quello definito da ⁽¹⁾:

$$\begin{cases} x^1 = x', \\ x^2 = s(x', \tau), \end{cases}$$

nel quale le (4) si scrivono:

$$\begin{cases} \frac{\partial z'_1}{\partial x'} = z'_3 \frac{\partial a'^{33}}{\partial x'} + \alpha' z'_2, \\ \frac{\partial z'_3}{\partial x'} = \beta' z'_4 + \gamma' z'_2, \\ \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x'} (c'_4 \sqrt{a'} z'_4) - \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial \tau} (c'_4 \sqrt{a'} z'_4) + \frac{\partial}{\partial \tau} (a'^{22} c'_2 \sqrt{a'} z'_2) = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{\partial z'_1}{\partial x'} - \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial z'_1}{\partial \tau} - a'^{22} B'_2 c'_4 \frac{\partial z'_4}{\partial \tau} + a'^{22} B'_2 c'_2 \left(\frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{\partial z'_2}{\partial x'} - \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial z'_2}{\partial \tau} \right) = \\ = z'_3 \left(\frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{\partial a'^{33}}{\partial x'} - \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial a'^{33}}{\partial \tau} \right) + a'^{22} B'_2 \frac{\partial c'_4}{\partial \tau} z'_4, \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha' &= a'^{22} \frac{\partial c'_2}{\partial x^1} B'_2 - a^{22} B'_2 \frac{\partial c'_2}{\partial \tau} \frac{\partial s / \partial x'}{\partial s / \partial \tau}; & \beta' &= \left(- \frac{c'_4}{B'_1} \frac{\partial B'_3}{\partial x^1} + \frac{c'_4}{B'_1} \frac{\partial B'_3}{\partial \tau} \frac{\partial s / \partial x'}{\partial s / \partial \tau} \right) B'_3; \\ \gamma' &= \left(- \frac{a'^{22} c'_2}{B'_1} \frac{\partial B'_3}{\partial \tau} \frac{1}{\partial s / \partial \tau} \right) B'_3. \end{aligned}$$

Dalle prime tre si ha:

$$\begin{aligned} z'_1 &= \int \left(\frac{\partial a'^{33}}{\partial x'} z'_3 + \alpha' z'_2 \right) dx' + f(\tau), \\ z'_3 &= \int (\beta' z'_4 + \gamma' z'_2) dx' + g(\tau), \\ \sqrt{a'} a'^{22} c'_2 z'_2 &= \int \left[\frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial \tau} (\sqrt{a'} c'_4 z'_4) - \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x'} (\sqrt{a'} c'_4 z'_4) \right] d\tau + h(x'). \end{aligned}$$

Ponendo

$$\frac{1}{\varepsilon} = \sqrt{a'} a'^{22} c'_2, \quad T = \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial \tau} (\sqrt{a'} c'_4 z'_4) - \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x'} (\sqrt{a'} c'_4 z'_4),$$

l'ultima si scrive:

$$\begin{aligned} & \alpha'_{\varepsilon} \frac{\partial s}{\partial \tau} h + \alpha'_{\varepsilon} \frac{\partial s}{\partial \tau} \left(\int T d\tau \right) - \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{df}{d\tau} - \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial \tau} (ga'^{33}) - \frac{\partial s}{\partial x'} \int \left[\alpha'_{\varepsilon} \int T d\tau \right] dx' - \\ & - \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int \alpha'_{\varepsilon} h dx' \right) - \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int \frac{\partial a'^{33}}{\partial x'} \left[\int \beta' z'_4 dx'' \right] dx' \right) - \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int \frac{\partial a'^{33}}{\partial x'} \left(\int \left[\gamma'_{\varepsilon} \int T d\tau \right] dx'' \right) dx' \right) - \\ & - \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int \frac{\partial a'^{33}}{\partial x'} \left(\int \gamma'_{\varepsilon} h dx'' \right) dx' \right) - a'^{22} B'_2 \frac{\partial}{\partial \tau} (c'_4 z'_4) + a'^{22} c'_2 B'_2 \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x'} (\varepsilon h) + \\ & + a'^{22} c'_2 B'_2 \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\varepsilon \int T d\tau \right) - a'^{22} c'_2 B'_2 \frac{\partial s}{\partial x'} h \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - a'^{22} c'_2 B'_2 \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\varepsilon \int T d\tau \right) + \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial a'^{33}}{\partial \tau} + \\ & + \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial a'^{33}}{\partial \tau} \cdot \int \beta' z'_4 dx' + \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial a'^{33}}{\partial \tau} \cdot \int \gamma'_{\varepsilon} h dx' + \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial a'^{33}}{\partial \tau} \cdot \left(\int \left(\gamma'_{\varepsilon} \int T d\tau \right) dx' \right). \end{aligned}$$

Nel caso del cilindro si ha, in forma più compatta:

$$\begin{aligned} & a'^{22} B'_2 \frac{\partial}{\partial \tau} (c'_4 z'_4) - \alpha'_{\varepsilon} \frac{\partial s}{\partial \tau} \cdot \int T d\tau + \frac{\partial s}{\partial x'} \cdot \int \left(\alpha'_{\varepsilon} \int T d\tau \right) dx' - a'^{22} c'_2 B'_2 \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\varepsilon \int T d\tau \right) + \\ & + a'^{22} c'_2 B'_2 \frac{\partial s}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\varepsilon \int T d\tau \right) = F(x', \tau). \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno cui devono soddisfare b_i e p sono

$$[b_1]_{x^1=\tau} = 0, \quad [a'^{22} B_2 b_2 + a'^{33} B_3 b_3 + p]_{x^1=\tau} = 0.$$

Quelle per le z_i sono quindi:

$$(5) \quad [z_4]_{x^1=\tau} = 0, \quad [a'^{22} B_2 c_2 z_2 + z_1]_{x^1=\tau} = 0.$$

Nell'equazione per z'_4 , z'_1 appare solo come $\partial z'_1 / \partial x'$; una volta ottenuta z'_4 , z'_1 è nota a meno di una $f(\tau)$ additiva, con la quale si soddisfa la (5).

Ringraziamo il prof. P. CALDIROLA per il suo costante interessamento a questo lavoro.

Nuclear Scattering of High Energy Electrons.

E. PREDAZZI

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Torino

(ricevuto il 31 Marzo 1959)

Extensive numerical calculations of the diffraction patterns relative to a high energy electron's collision with a coulombian field of a particular form, have been performed recently ⁽¹⁾. From these numerical calculations we have learned that in order to know the differential cross sections at large angles, an exact evaluation of the single partial wave phase shifts is needed. In fact for 236 MeV electrons scattered by gold, the differential cross section beyond 90° requires the knowledge of the phase shifts with an error not larger than 10^{-5} rad.

This fact has a simple theoretical interpretation: at high energies, small momentum transfers are the most frequent, in our case, for instance, the differential cross section at 90° becomes about 10^{-4} times smaller than at 30°. This means that at large angles conspicuous interference phenomena must occur among the various partial waves which form the total scattered amplitude. For this reason the phase shifts need an extremely accurate evaluation. These interferential phenomena come out because of the large number of nodes involved in the high l partial waves which contribute to the scattering. For this one needs to remember that the function $\sqrt{\sin\theta} P_l(\cos\theta)$ may be approximated, for large l , by a zero order Bessel function:

$$\sqrt{\sin\theta} P_l(\cos\theta) \simeq \sqrt{\theta} J_0[(l + \frac{1}{2})\theta],$$

whose zeroes become more and more dense for large l .

The theoretical interpretation of the measured cross sections raises the problem of giving the partial wave phase shifts by means of a compact analytical form.

Recently REIGNIER ⁽²⁾ elaborated an approximated method of solving a Klein-Gordon equation based on the solution by iteration of an equivalent Riccati's equation. He obtained, in this way, values for the scattering phase shifts (for some charge distributions in gold) with an approximation of $5 \cdot 10^{-3}$ rad.

We present here a more direct and simple approach, for the same problem, making use of a suitable simplification of the well known W.K.B. method. Electrons

⁽¹⁾ D. G. RAVENHALL and D. R. YENNIE: *The Physical Society*, **70**, 857 (1957).

⁽²⁾ J. REIGNIER: *Nucl. Phys.*, **7**, 526 (1958).

are still considered Klein-Gordon particles as for Ravenhall-Yennie and Reignier. This is, in fact, allowable at high energies, since geometrical optics is expected to become valid.

We effected a numerical control by computing the differential cross section for 236 MeV electrons which are scattered by a shell charge distribution in gold. The Klein-Gordon equation reads:

$$(1) \quad \frac{d^2 u(r)}{dr^2} - \left[\frac{(j + \frac{1}{2})(j + \frac{3}{2})}{r^2} - [E - V(r)]^2 + m^2 \right] u(r) = 0,$$

where $V(r)$ is the usual electrostatic potential. Putting:

$$U(r) = V(r)(2E - V(r)),$$

the well-known W.K.B. phase shifts are:

$$(2) \quad \eta_l = \int_{r_0}^{\infty} \sqrt{k^2 - U(r) - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2}} dr - \int_{r_1}^{\infty} \sqrt{k^2 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2}} dr,$$

where r_0 and r_1 are the turning points of the respective functions under the sign of integration.

Neglecting at first the difference between r_0 and r_1 through a first order expansion, we obtain an approximated expression of (2):

$$(3) \quad \eta_l = -\frac{k}{E} \int_0^{\infty} V \left(\sqrt{Z^2 + \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{k^2}} \right) dz, \quad \text{with } kz = \sqrt{(kr)^2 - (l + \frac{1}{2})^2}.$$

This formula however is not sufficiently accurate, but a considerable improvement is reached if the expansion includes terms of second order only.

Since the internal and external potential for our charge distribution are:

$$V_i = -\frac{Ze^2}{R}, \quad (r < R)$$

$$V_e = -\frac{Ze^2}{r}, \quad (r > R)$$

the phase shifts with $kR \geq l + \frac{1}{2}$ are given by the formula:

$$(4) \quad \eta_l = -k \frac{Ze^2}{E} \ln [kR + \sqrt{(kR)^2 - (l + \frac{1}{2})^2}] + k \frac{Ze^2}{E} \sqrt{1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{(kR)^2}} + \\ + \left(k \frac{Ze^2}{E} \right)^2 \frac{l + \frac{1}{2}}{(2kR)^2} \left[\frac{2(l + \frac{1}{2})}{3kR} - 1 \right] + k \frac{Ze^2}{E} \ln (kr + kz),$$

while those relative to angular momenta $l + \frac{1}{2} > kR$ are:

$$(5) \quad \eta_l = -k \frac{Ze^2}{E} \ln(l + \tfrac{1}{2}) - \frac{1}{12} \left(k \frac{Ze^2}{E} \right)^2 \frac{1}{l + \tfrac{1}{2}} + k \frac{Ze^2}{E} \ln(kr).$$

Obviously an approximation of this kind can be made for an arbitrary charge distribution. We have limited ourselves to consider the particular case of a shell charge distribution in order to compare our numerical values with those given by RAVENHALL and YENNIE ⁽¹⁾. The numerical results corresponding to $kR=5.6$ are listed in Table I.

TABLE I. - *Phase shifts for scattering from the shell charge distribution for gold.*

l	$\eta_l^{\text{R.Y.}}$	η_l	l	$\eta_l^{\text{R.Y.}}$	η_l
0	-0.82006	-0.81847	6	-1.08480	-1.08313
1	-0.83253	-0.82982	7	-1.16473	-1.16514
2	-0.85521	-0.85261	8	-1.23632	-1.23679
3	-0.88041	-0.88095	9	-1.30020	-1.30053
4	-0.92664	-0.92470	10	-1.35772	-1.35794
5	-1.00054	-0.99782	11	-1.41001	-1.41015

$\eta_l^{\text{R.Y.}}$ are the phase shifts of RAVENHALL and YENNIE ⁽¹⁾, η_l are the phase shifts corresponding to our approximation (eqs. (4), (5)).

From Table I we see that the values so obtained are good with an error not larger than $3 \cdot 10^{-3}$ rad.

The differential cross section values for 236 MeV electrons scattered by gold can now be evaluated making use of the so-called «reduced series» introduced by RAVENHALL, YENNIE and WILSON ⁽³⁾ for the scattering amplitude, and our phase shifts. The results are given in Table II.

TABLE II. - *Numerical results for differential cross section.*

	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
9)	$3.21386 \cdot 10^{-27}$	$8.24867 \cdot 10^{-28}$	$3.77237 \cdot 10^{-29}$	$9.19074 \cdot 10^{-29}$	$4.32761 \cdot 10^{-29}$	$4.20327 \cdot 10^{-30}$	$4.76364 \cdot 10^{-30}$

These values, compared with the curve reported by HOFSTADTER ⁽⁴⁾, show that, for angles not larger than $70^\circ \div 80^\circ$, the agreement is rather good, the relative error being less than 10%.

It is not possible to use our approximation, which implies a phase shift error of the order of 10^{-3} rad, at angles larger than $70^\circ \div 80^\circ$. We wish to observe, however that a better knowledge of the first two phase shifts is sufficient for a

⁽³⁾ D. G. RAVENHALL, D. R. YENNIE and D. G. WILSON: *Phys. Rev.*, **95**, 500 (1954).

⁽⁴⁾ R. HOFSTADTER: *Annual Review of Nuclear Science*, **7**, 231 (1957).

good evaluation of the differential cross section also at 90° . For this one has, for instance, the asymptotical values of the phase shifts valid for the first angular momenta of Verde ⁽⁵⁾. The theoretical interpretation of the forward differential cross section ($\theta < 90^\circ$) for which our approximation is valid serves already to discriminate among the different possible charge distributions.

Besides, the absence of the spin interaction in all the above calculations puts in discussion the comparison between theoretical and experimental values for angles $> 90^\circ$ being, for these angles, the differential cross section sensitive to single phase shifts variations of the order of 10^{-4} rad.

* * *

I wish to thank Professor M. VERDE for having suggested this problem and for many helpful and interesting discussions.

⁽⁵⁾ M. VERDE: *Nuovo Cimento*, **10**, 560 (1958).

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Direttore responsabile: G. POLVANI

Tipografia Compositori - Bologna

Questo fascicolo è stato licenziato dai torchi il 15-IV-1959